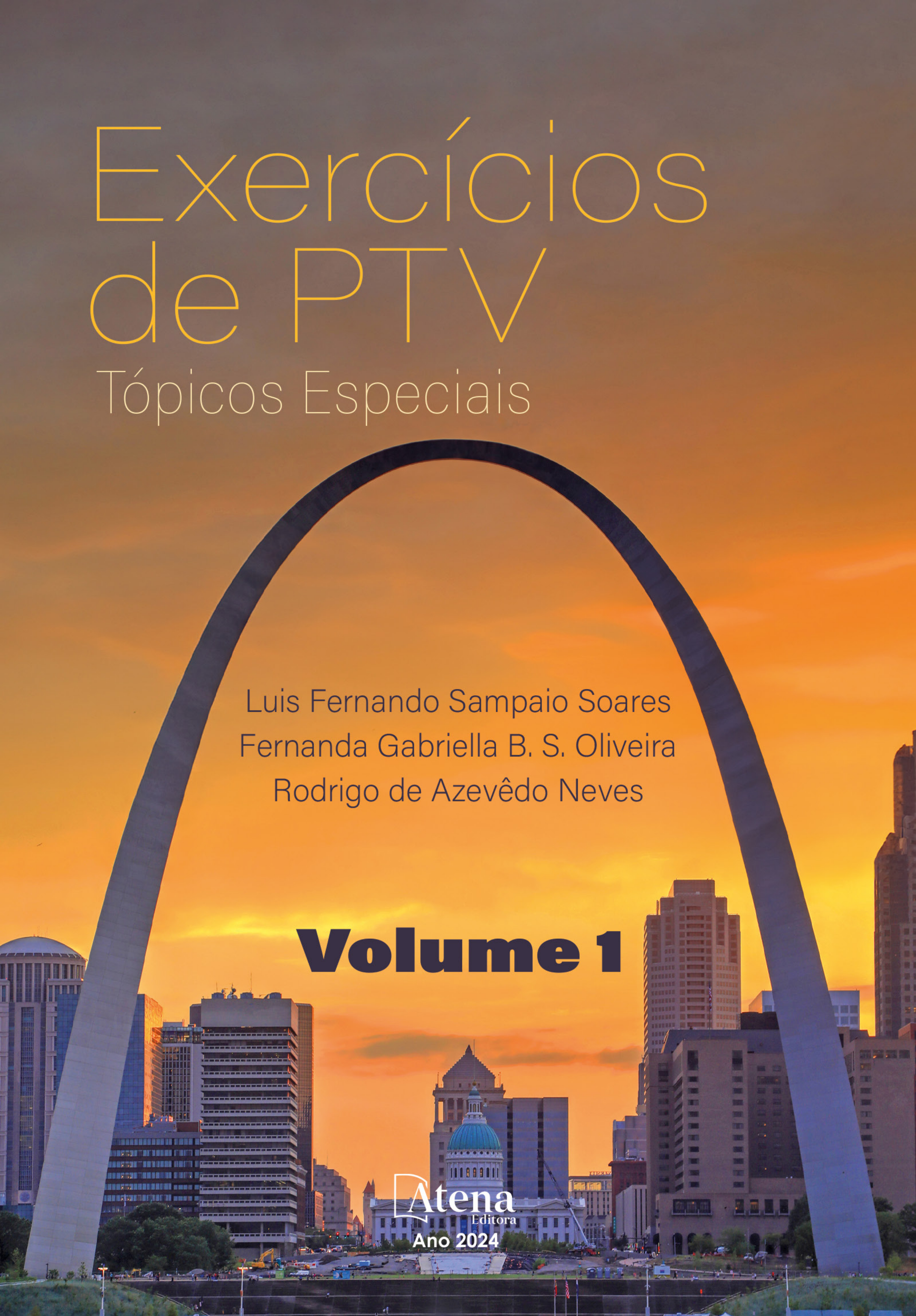
Exercícios de PTV

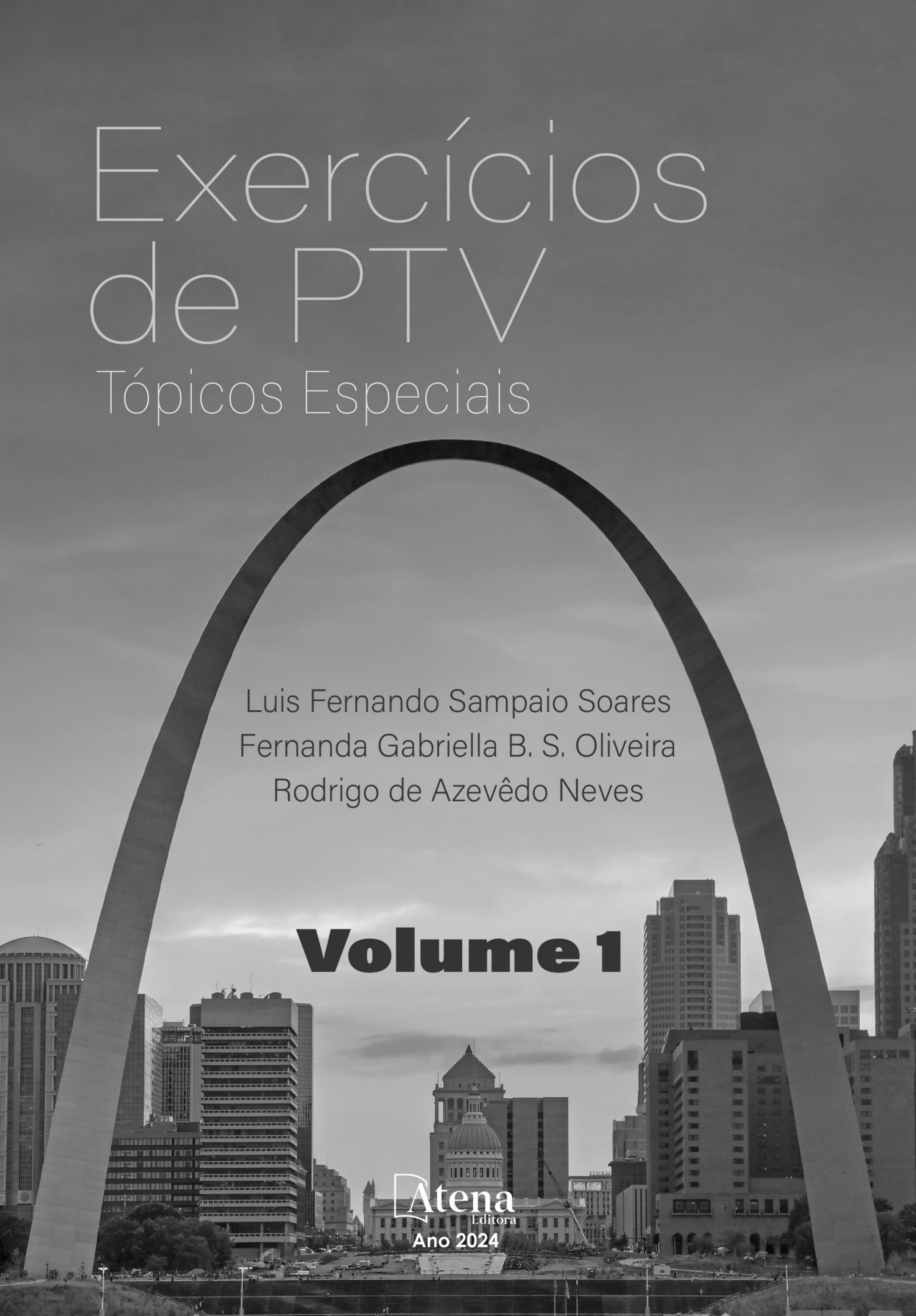
Tópicos Especiais

Luis Fernando Sampaio Soares
Fernanda Gabriella B. S. Oliveira
Rodrigo de Azevêdo Neves

Volume 1



Atena Editora
Ano 2024



Exercícios de PTV

Tópicos Especiais

Luis Fernando Sampaio Soares
Fernanda Gabriella B. S. Oliveira
Rodrigo de Azevêdo Neves

Volume 1

Atena Editora
Ano 2024

Editora chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Editora executiva
Natalia Oliveira
Assistente editorial
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto gráfico
Ellen Andressa Kubisty
Luiza Alves Batista
Nataly Evilin Gayde
Thamires Camili Gayde
Imagens da capa
iStock
Edição de arte
Luiza Alves Batista

2024 *by Atena Editora*
Copyright © Atena Editora
Copyright do texto © 2024 O autor
Copyright da edição © 2024 Atena Editora
Direitos para esta edição cedidos à Atena Editora pelo autor.
Open access publication by Atena Editora

Todo o conteúdo deste livro está licenciado sob uma Licença de Atribuição *Creative Commons*. Atribuição-Não-Comercial-NãoDerivativos 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

O conteúdo da obra e seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva do autor, inclusive não representam necessariamente a posição oficial da Atena Editora. Permitido o *download* da obra e o compartilhamento desde que sejam atribuídos créditos ao autor, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Os manuscritos nacionais foram previamente submetidos à avaliação cega por pares, realizada pelos membros do Conselho Editorial desta editora, enquanto os manuscritos internacionais foram avaliados por pares externos. Ambos foram aprovados para publicação com base em critérios de neutralidade e imparcialidade acadêmica.

A Atena Editora é comprometida em garantir a integridade editorial em todas as etapas do processo de publicação, evitando plágio, dados ou resultados fraudulentos e impedindo que interesses financeiros comprometam os padrões éticos da publicação. Situações suspeitas de má conduta científica serão investigadas sob o mais alto padrão de rigor acadêmico e ético.

Conselho Editorial
Ciências Exatas e da Terra e Engenharias
Prof. Dr. Adélio Alcino Sampaio Castro Machado – Universidade do Porto
Profª Drª Alana Maria Cerqueira de Oliveira – Instituto Federal do Acre
Profª Drª Ana Grasielle Dionísio Corrêa – Universidade Presbiteriana Mackenzie
Profª Drª Ana Paula Florêncio Aires – Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
Prof. Dr. Carlos Eduardo Sanches de Andrade – Universidade Federal de Goiás

Profª Drª Carmen Lúcia Voigt – Universidade Norte do Paraná
Prof. Dr. Cleiseano Emanuel da Silva Paniagua – Colégio Militar Dr. José Aluisio da Silva Luz / Colégio Santa Cruz de Araguaina/TO
Profª Drª Cristina Aledi Felsemburgh – Universidade Federal do Oeste do Pará
Prof. Dr. Diogo Peixoto Cordova – Universidade Federal do Pampa, Campus Caçapava do Sul
Prof. Dr. Douglas Gonçalves da Silva – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Prof. Dr. Eloi Rufato Junior – Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Profª Drª Érica de Melo Azevedo – Instituto Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Fabrício Menezes Ramos – Instituto Federal do Pará
Prof. Dr. Fabrício Moraes de Almeida – Universidade Federal de Rondônia
Profª Drª Glécilla Colombelli de Souza Nunes – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Hauster Maximiler Campos de Paula – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Iara Margolis Ribeiro – Universidade Federal de Pernambuco
Profª Drª Jéssica Barbosa da Silva do Nascimento – Universidade Estadual de Santa Cruz
Profª Drª Jéssica Verger Nardeli – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Prof. Dr. Juliano Bitencourt Campos – Universidade do Extremo Sul Catarinense
Prof. Dr. Juliano Carlo Rufino de Freitas – Universidade Federal de Campina Grande
Prof. Dr. Leonardo França da Silva – Universidade Federal de Viçosa
Profª Drª Luciana do Nascimento Mendes – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte
Prof. Dr. Marcelo Marques – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Junior – Universidade Federal de Juiz de Fora
Prof. Dr. Marcos Vinicius Winckler Caldeira – Universidade Federal do Espírito Santo
Profª Drª Maria Iaponeide Fernandes Macêdo – Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Profª Drª Maria José de Holanda Leite – Universidade Federal de Alagoas
Profª Drª Mariana Natale Fiorelli Fabiche – Universidade Estadual de Maringá
Prof. Dr. Miguel Adriano Inácio – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
Prof. Dr. Milson dos Santos Barbosa – Universidade Tiradentes
Profª Drª Natiéli Piovesan – Instituto Federal do Rio Grande do Norte
Profª Drª Neiva Maria de Almeida – Universidade Federal da Paraíba
Prof. Dr. Nilzo Ivo Ladwig – Universidade do Extremo Sul Catarinense
Profª Drª Priscila Natasha Kinas – Universidade do Estado de Santa Catarina
Profª Drª Priscila Tessmer Scaglioni – Universidade Federal de Pelotas
Prof. Dr. Rafael Pacheco dos Santos – Universidade do Estado de Santa Catarina
Prof. Dr. Ramiro Picoli Nippes – Universidade Estadual de Maringá
Profª Drª Regina Célia da Silva Barros Allil – Universidade Federal do Rio de Janeiro
Prof. Dr. Sidney Gonçalo de Lima – Universidade Federal do Piauí
Prof. Dr. Takeshy Tachizawa – Faculdade de Campo Limpo Paulista

CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA E ENGENHARIAS

Exercícios de PTV: tópicos especiais - Volume 1

Diagramação:	Camila Alves de Cremo
Correção:	Jeniffer dos Santos
Indexação:	Amanda Kelly da Costa Veiga
Revisão:	Os autores
Organizadores:	Luis Fernando Sampaio Soares Fernanda Gabriella B. S. Oliveira Rodrigo de Azevêdo Neves

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S676 Soares, Luis Fernando Sampaio
Exercícios de PTV: tópicos especiais - Volume 1 / Luis Fernando Sampaio Soares, Fernanda Gabriella B. S. Oliveira, Rodrigo de Azevêdo Neves. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2024.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-258-3010-0
DOI: https://doi.org/10.22533/at.ed.100242012

1. Engenharia estrutural. 2. Análise e projeto de estruturas. I. Soares, Luis Fernando Sampaio. II. Oliveira, Fernanda Gabriella B. S. III. Neves, Rodrigo de Azevêdo. IV. Título.

CDD 624

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

DECLARAÇÃO DO AUTOR

Para fins desta declaração, o termo 'autor' será utilizado de forma neutra, sem distinção de gênero ou número, salvo indicação em contrário. Da mesma forma, o termo 'obra' refere-se a qualquer versão ou formato da criação literária, incluindo, mas não se limitando a artigos, e-books, conteúdos on-line, acesso aberto, impressos e/ou comercializados, independentemente do número de títulos ou volumes. O autor desta obra: 1. Atesta não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação à obra publicada; 2. Declara que participou ativamente da elaboração da obra, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final da obra para submissão; 3. Certifica que a obra publicada está completamente isenta de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirma a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhece ter informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa; 6. Autoriza a edição da obra, que incluem os registros de ficha catalográfica, ISBN, DOI e demais indexadores, projeto visual e criação de capa, diagramação de miolo, assim como lançamento e divulgação da mesma conforme critérios da Atena Editora.

DECLARAÇÃO DA EDITORA

A Atena Editora declara, para os devidos fins de direito, que: 1. A presente publicação constitui apenas transferência temporária dos direitos autorais, direito sobre a publicação, inclusive não constitui responsabilidade solidária na criação da obra publicada, nos termos previstos na Lei sobre direitos autorais (Lei 9610/98), no art. 184 do Código Penal e no art. 927 do Código Civil; 2. Autoriza e incentiva os autores a assinarem contratos com repositórios institucionais, com fins exclusivos de divulgação da obra, desde que com o devido reconhecimento de autoria e edição e sem qualquer finalidade comercial; 3. A editora pode disponibilizar a obra em seu site ou aplicativo, e o autor também pode fazê-lo por seus próprios meios. Este direito se aplica apenas nos casos em que a obra não estiver sendo comercializada por meio de livrarias, distribuidores ou plataformas parceiras. Quando a obra for comercializada, o repasse dos direitos autorais ao autor será de 30% do valor da capa de cada exemplar vendido; 4. Todos os membros do conselho editorial são doutores e vinculados a instituições de ensino superior públicas, conforme recomendação da CAPES para obtenção do Qualis livro; 5. Em conformidade com a Lei Geral de Proteção de Dados (LGPD), a editora não cede, comercializa ou autoriza a utilização dos nomes e e-mails dos autores, bem como quaisquer outros dados dos mesmos, para qualquer finalidade que não o escopo da divulgação desta obra.

APRESENTAÇÃO

Essa obra não tem o intuito de apresentar problemas usuais do cotidiano do Engenheiro Civil, e sim disponibilizar um material com análises mais complexas de casos atípicos, como barras curvas e de seção transversal variável. Portanto, serão discutidos aqui exercícios de pórticos compostos por barras de eixo reto e arcos de circunferência solicitados por cargas distribuídas e concentradas para o leitor interessado em aprofundar-se em tópicos relacionados à Engenharia de Estruturas, em especial àqueles diretamente ligados ao cálculo de esforços internos, deslocamentos e rotações em pórticos isostáticos e hiperestáticos.

O conceito por trás da ideia de utilizar o PTV (Princípio dos Trabalhos Virtuais) como conteúdo principal no exercício de elementos menos usuais das estruturas passa pela necessidade de identificação e determinação dos esforços relevantes inerentes a esse Princípio. Dessa forma, considera-se o PTV quase como um pretexto para calcular momentos fletores, normais, cortantes, deflexões e rotações em seções de elementos e situações menos comuns.

A propósito, é exigido dos leitores um grau de familiaridade com conceitos mais gerais da Análise Estrutural, tais como esforços internos, hiperestaticidade, assim como denominações mais específicas do PTV, como Sistema Real ou Estado de Deformação, Sistema Virtual ou Estado de Carregamento, Sistemas [0], [1], [n] do Método das Forças, entre outros. Os autores recomendam títulos como Süssekind (1980), Soriano & Lima (2006), e Martha (2022) para os interessados.

Faz-se necessário também ressaltar o aspecto pouco prático, em termos de construção civil, de alguns valores de cargas e deslocamentos, por exemplo. As discrepâncias nas ordens de grandezas são justificadas não apenas pelo descompromisso com a realidade, focando na prática e aprofundamento de algumas metodologias de cálculo, mas também pelo incentivo ao desenvolvimento do senso crítico, do "olho do engenheiro" numa era cada vez mais dominada pela computação e inteligências artificiais.

Os autores registram aqui seus agradecimentos aos respectivos familiares, que ofereceram suporte incondicional a essa empreitada.

Agradecemos, também, aos Professores de Engenharia Civil das instituições UEMA (Universidade Estadual do Maranhão) e IFMA (Instituto Federal do Maranhão), com especial menção a Luís Alfredo Lopes Soares (In memoriam), João Celso Martins Marques, Ivar Ribeiro Hortegal, Henrique Mariano Costa do Amaral e André Sarkis Müller, por suas valiosas contribuições ao longo de nossa jornada acadêmica.

Estendemos os agradecimentos aos nossos orientadores de Mestrado e Doutorado: Mounir Khalil El Debs, Ana Lucia Homce de Cresce El Debs, Wilson Sérgio Venturini (In memoriam), Alaa Mohamed-Chateauneuf e Robert Lars Vollum.

Aos então discentes Letícia Amorim Melo, Thaynara de Jesus Martins da Silva, David dos Santos Coimbra e Marco Antonio Pinho Leite, que contribuíram com sugestões significativas durante a etapa de correção do trabalho, essenciais para a elaboração de sua versão final.

SUMÁRIO

SUMÁRIO

1 ASPECTOS GERAIS

Esse capítulo discutirá algumas premissas e escolhas que foram utilizadas na redação deste livro visando torná-lo mais compreensível, especialmente para leitores menos experientes. Diversos autores que abordaram o PTV, seja de forma mais teórica ou mais prática (como se objetiva aqui), divergem quanto a algumas nomenclaturas utilizadas.

Primeiramente, algumas publicações fazem uso da denominação mais específica *Princípio das Forças Virtuais* para o tipo de análise feita aqui, considerando que neste volume apenas se fará uso de esforços unitários, e não de recalques. Optou-se, no entanto, pela manutenção do título mais genérico.

Süssekind (1980) utiliza a nomenclatura *Estado de Deformação* para a estrutura em análise que fornece os deslocamentos e rotações a serem determinados, e *Estado de Carregamento* para a etapa de aplicação de forças ou momentos (geralmente unitários) visando a escolha do parâmetro a ser calculado. Souza & Antunes (1995) intitula de *Estado de Deslocamentos* e *Estado de Forças*, respectivamente.

Soriano & Lima (2006) não batiza diretamente as duas etapas, detalhando-as, por exemplo, como *"Esforços Seccionais sob o carregamento original"* e *"Esforços Seccionais sob força unitária"*, durante a resolução de determinado problema. Martha (2022), por sua vez, denomina as mesmas fases como *Sistema Real* e *Sistema Virtual*, respectivamente. O fluxograma apresentado na Figura 1.1 resume a metodologia e denominações adotadas neste livro que segue o utilizado por Martha (2022).

Em termos de cálculo de Esforços Internos, é importante destacar a pouca atenção dada às tabelas de combinações de diagramas, comumente utilizadas para barras de eixo reto com seção transversal constante. Soriano & Lima (2006) cita como *procedimento A. N. Vereshchagin*, embora a referência encontrada pelos autores seja de Beyer (1956). Aqui, decidiu-se por trabalhar exclusivamente com as integrais dos esforços internos, justificados pela escassez de publicações abordando e disponibilizando soluções desta forma, assim como a inclusão de elementos não compreendidos pelas referidas tabelas (seja pelo eixo curvo, seja pela variação de inércia).

Os leitores são encorajados também a fazer avaliações quanto às aproximações utilizadas durante a resolução dos problemas e os resultados apresentados. Serão empregadas três casas decimais para as reações de apoio. No entanto, considerando a ordem de grandeza de valores como coeficientes de flexibilidades, e o potencial impacto no valor final dos deslocamentos e rotações, o número de casas decimais aumenta significativamente para outros parâmetros, levando em consideração que os cálculos foram realizados com o auxílio de calculadoras científicas ou softwares diversos.

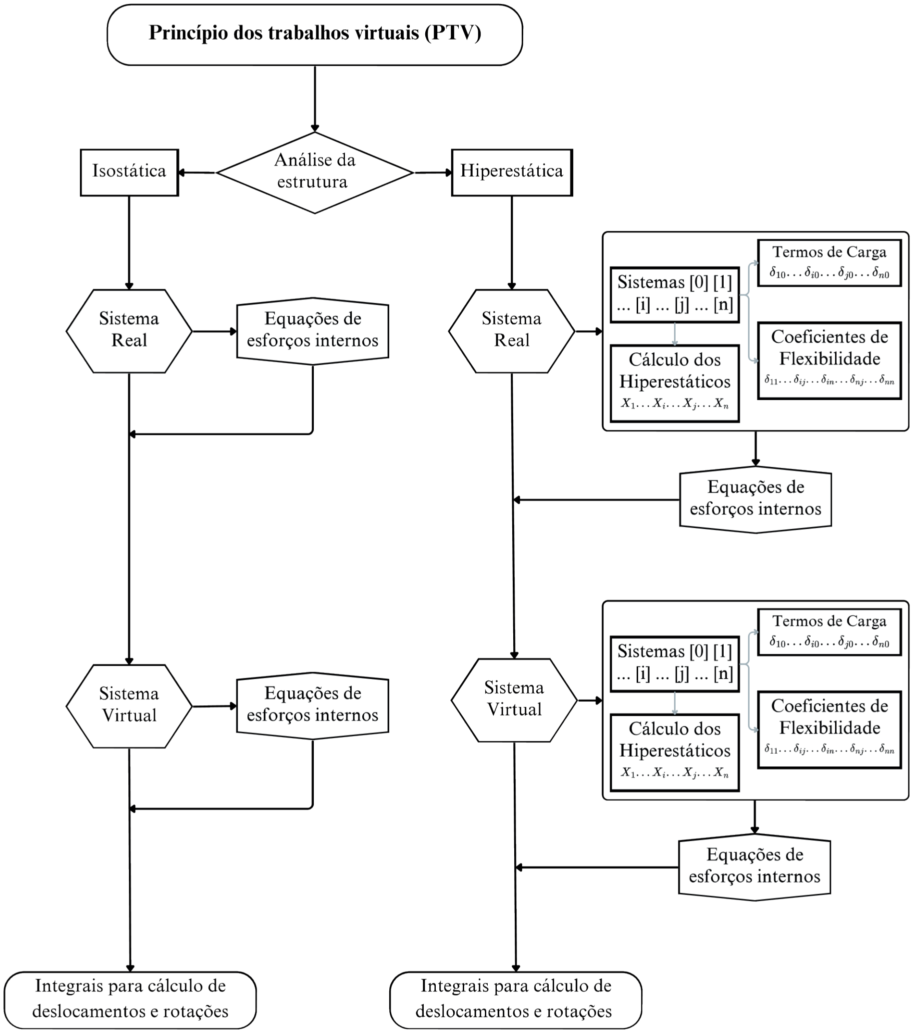


Figura 1.1 – Fluxograma de resolução contendo as nomenclaturas utilizadas no PTV deste livro.

Ainda na escrita dos equacionamentos de esforços, a variável x é utilizada em boa parte das equações polinomiais deste livro representando o eixo de barras com inclinações de 0º ou 180º (em relação ao eixo horizontal global) em todos os sentidos (ver Figura 1.2), e t para outras angulações. Em determinadas situações, até mesmo barras de 90º são identificadas como x (ver barra *EC* na Figura 1.2). Essa convenção será detalhada e explorada em problemas oportunos. O eixo integrável é então melhor definido pela direção estipulada nas letras que compõe os extremos das barras em questão e pelos limites das integrais sempre dispostos à direita das equações nas estruturas resolvidas neste livro.

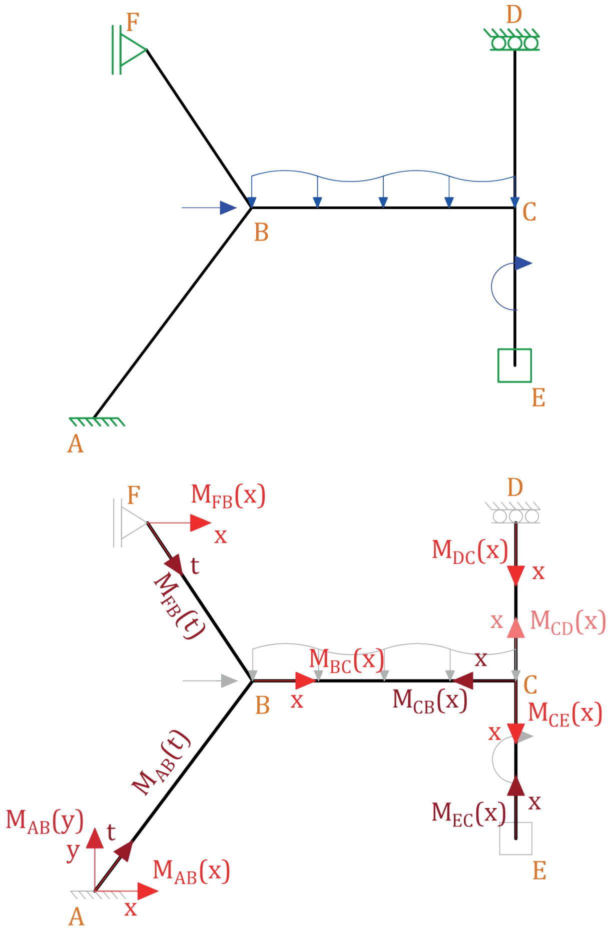


Figura 1.2 – Pórtico genérico com barras retas e convenções de eixo para equações de esforços internos.

Os arcos de circunferência presentes nessa publicação foram resolvidos utilizando coordenadas polares. Para tanto, é necessário escrever o infinitésimo de curva “ds” em função do raio e da angulação “$d\alpha$”, conforme Figura 1.3. De maneira análoga ao descrito para as barras retas, a ordem das letras nos extremos dos elementos define a direção (horária ou anti-horária) e disposição da variável “α”.

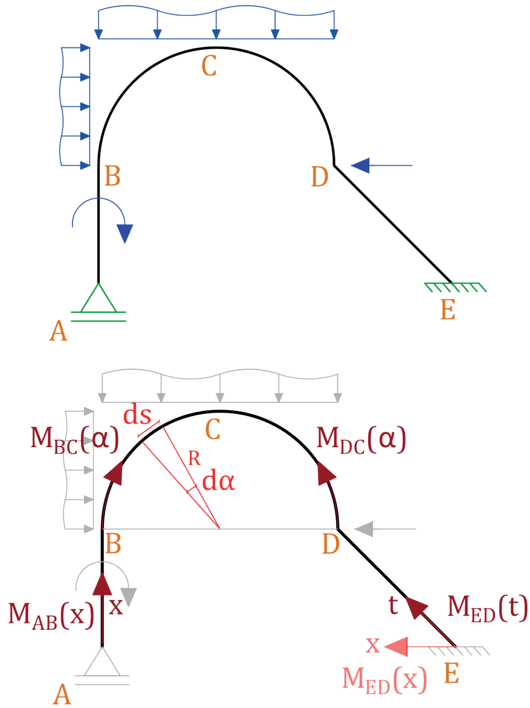


Figura 1.3 – Pórtico genérico com barras retas e curvas com respectivas convenções de eixo para equações de esforços internos.

Os sinais de Momento Fletor obedecem a convenção de fibras tracionadas/comprimidas para barras horizontais descrita na Figura 1.4. Para elementos com angulações diferentes de 0º ou 180º, ou para os casos de arcos, a convenção será determinada individualmente em cada exercício. Os sentidos positivos para cálculo das reações de apoio são explicitados durante os cálculos, e variam ao longo da publicação.

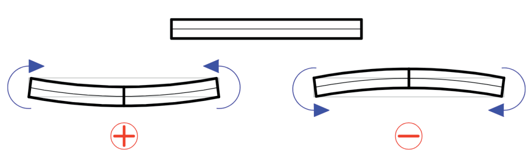


Figura 1.4 – Convenção para sinais do Momento Fletor em barras horizontais.

Considerando a metodologia do PTV e o caráter abstrato do Sistema Virtual, as reações de apoio e os coeficientes de flexibilidades calculados a partir de esforços adimensionais inerentes ao procedimento do Método das Forças (ver Figura 1.1) possuem unidades de medida que podem gerar confusão à primeira vista. O Apêndice A detalha essas peculiaridades num pórtico hiperestático genérico.

A identificação do grau de indeterminação estática (hiperestaticidade) de estruturas em pórticos planos é assunto rotineiramente abordado por pesquisadores e autores da

área. Tentativas de equacionar essa identificação foram propostas em diversas publicações desde Maxwell (1864), White et al. (1976), Mori & Corrêa (1982), Pellegrino & Calladine (1986), Guest & Calladine (2000), Pandit & Gupta (2008) entre outros, além do estabelecido em Martha (2022) e adotado nos exemplos deste livro. O Apêndice B apresenta algumas variações dos exercícios propostos aqui, como forma de praticar essa classificação.

Embora todas essas formulações se diferenciem num aspecto ou outro, são bem eficazes no que se propõem. É importante, no entanto, destacar que esses equacionamentos determinam somente o grau de hiperestaticidade das estruturas, restando ainda uma avaliação igualmente importante relacionada à estabilidade/instabilidade do pórtico em questão. Em *Apêndice B: Figura 1(c)* e *(d)*, por exemplo, são apresentados casos de estruturas classificadas como isostáticas ou hiperestáticas, porém instáveis.

O título dos exercícios possui “tags” visando auxiliar na identificação de questões específicas ao interesse do leitor. O Apêndice C apresenta ainda mais resultados de deslocamentos e rotações dos pórticos propostos e resolvidos aqui para serem usados como exercícios de fixação.

2 EXERCÍCIO 2 (ISOSTÁTICO, VARIAÇÃO DE ALTURA, ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA)

Calcular o deslocamento vertical em B (δ_{V_B}), rotação da seção em D (θ_D) e deslocamento horizontal em A (δ_{H_A}) da Figura 2.1. Considerar somente os efeitos da flexão e os detalhes de altura da seção explícitos na Figura 2.2.

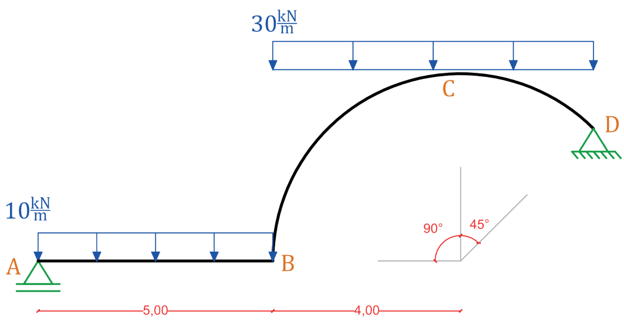


Figura 2.1 - Pórtico do Exercício 2 (todos os comprimentos em m, exceto quando indicado).

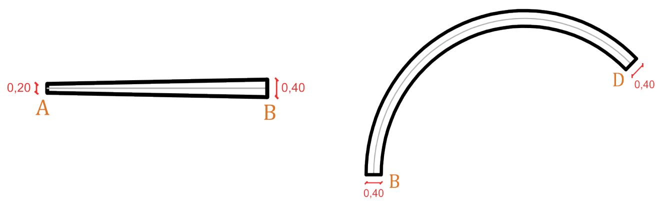


Figura 2.2 - Detalhes das alturas de seção transversal do Exercício 2.

<u>Dados do problema:</u>

$E_c = 20\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$b = 20\ cm$ (Base das seções transversais retangulares)

A estrutura em questão é isostática, pois o número de reações de apoio (*3*) é igual ao número de equações de equilíbrio da estática no plano (*3*).

2.1 Sistema real (figura 2.3)

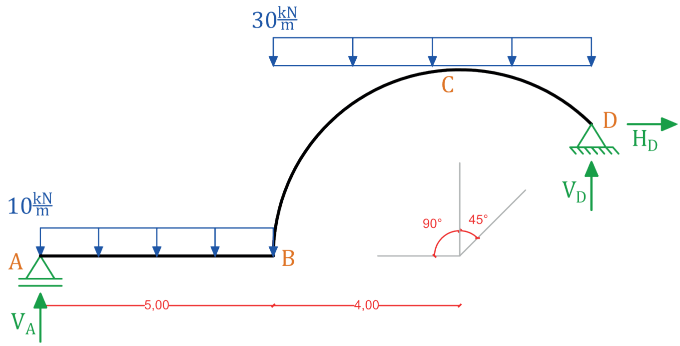


Figura 2.3 - Sistema Real do Exercício 2.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow^+} = \boldsymbol{0} \tag{2.1}$$

$$H_D = 0$$

Para o cálculo do somatório das forças verticais e distâncias para o equilíbrio de momentos apresentados em (2.2) e (2.3) respectivamente, a projeção horizontal do arco de circunferência é calculada conforme ilustrada na Figura 2.4.

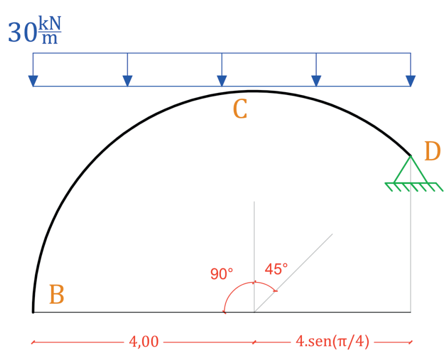


Figura 2.4 - Projeção horizontal do arco BCD.

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow^+} = \boldsymbol{0} \tag{2.2}$$

$$V_D + V_A - 10 \cdot 5 - 30 \cdot \left[4 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 0$$

$$\Sigma M_{z_D}^{\circlearrowright +} = 0$$

$$V_A \cdot \left[5 + 4 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - 10 \cdot 5 \cdot \left[2{,}5 + 4 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - 30 \cdot \left[4 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \cdot \frac{\left[4 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}{2} = 0 \qquad (2.3)$$

O sistema de equações (2.1), (2.2) e (2.3) resulta nas reações de apoio apresentadas na Tabela 2.1.

Reações de Apoio		
$V_A = 98{,}562\ kN$	$H_D = 0\ kN$	$V_D = 156{,}291\ kN$

Tabela 2.1 - Resumo das Reações de Apoio do Sistema Real.

As equações de esforços estão apresentadas em (2.4). A Figura 2.5 expressa as escolhas das seções para determinação dos momentos fletores. Em relação às definições de eixos para as barras, utilizou-se os procedimentos convencionados na Figura 1.2 e na Figura 1.3.

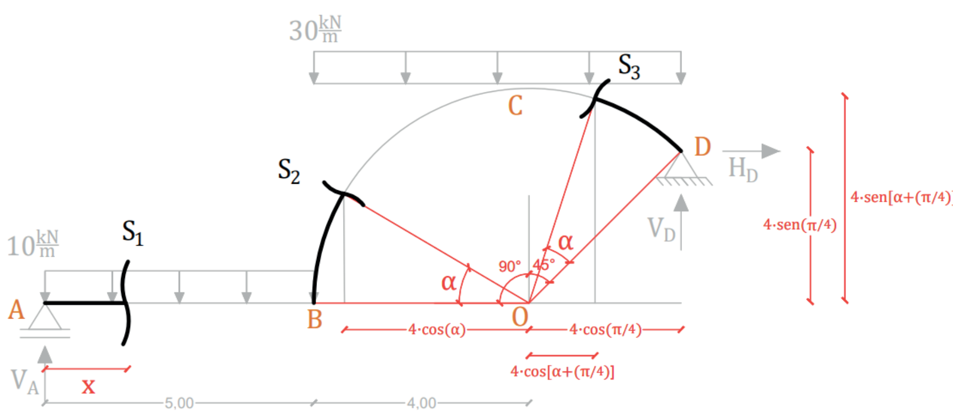


Figura 2.5 – Determinação das seções para as equações de Momento Fletor.

$$M_{AB}(x) = V_A \cdot x - 5 \cdot x^2 \qquad \textbf{S}_1 \quad 0 \leq x \leq 5$$

$$M_{BC}(\alpha) = M_{AB}(5) + (V_A - 10 \cdot 5) \cdot [4 - 4 \cdot \cos(\alpha)] - 30 \cdot \frac{[4 - 4 \cdot \cos(\alpha)]^2}{2} \qquad \textbf{S}_2 \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \qquad (2.4)$$

$$M_{DC}(\alpha) = V_D \cdot \left[4 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4 \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right] - 30 \cdot \frac{\left[4 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4 \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{2} \qquad \textbf{S}_3 \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$$

2.2 Sistema virtual para cálculo de δ_{V_B} (figura 2.6)

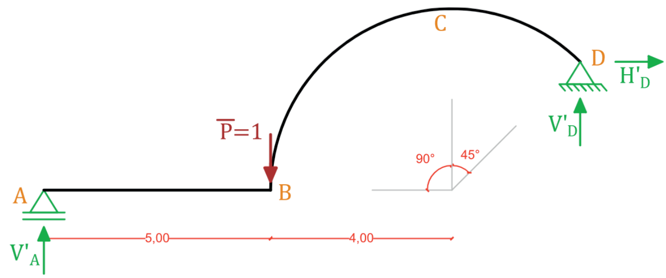


Figura 2.6 - Sistema Virtual para cálculo de deslocamento vertical em "B".

<u>**Cálculo das reações de apoio**</u>

$$\Sigma F_H^{\rightarrow +} = 0 \tag{2.5}$$

$$H_D' = 0$$

$$\Sigma F_V^{\uparrow +} = 0 \tag{2.6}$$

$$V_D' + V_A' - 1 = 0$$

$$\Sigma M_{z_D}^{\circlearrowleft +} = 0 \tag{2.7}$$

$$V_A' \cdot \left[5 + 4 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - 1 \cdot \left[4 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 0$$

As reações de apoio estão resumidas na Tabela 2.2. As equações de esforços internos para o pórtico da Figura 2.6 estão resumidas em (2.8), levando em consideração as seções já estabelecidas na Figura 2.5.

Reações de Apoio		
$V_A' = 0{,}577 \quad \frac{kN}{kN}$	$H_D' = 0$	$V_D' = 0{,}423 \quad \frac{kN}{kN}$

Tabela 2.2 - Resumo das Reações de Apoio do Sistema Virtual para cálculo do deslocamento vertical em "B".

$$M'_{AB}(x) = V'_A \cdot x \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \le x \le 5$$

$$M'_{BC}(\alpha) = M'_{AB}(5) + (V'_A - 1) \cdot [4 - 4 \cdot \cos(\alpha)] \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \qquad (2.8)$$

$$M'_{DC}(\alpha) = V'_D \cdot \left[4 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4 \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$$

O deslocamento vertical está calculado em (2.21).

2.3 Sistema virtual para cálculo de θ_D (figura 2.7)

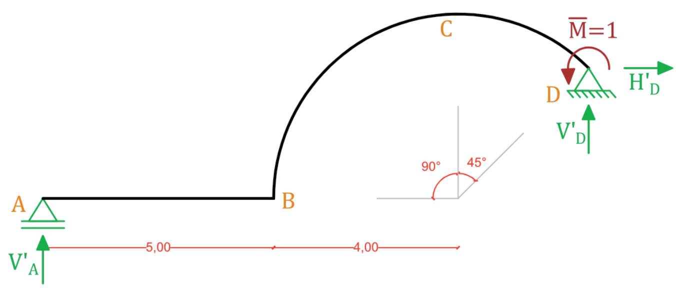


Figura 2.7 - Sistema Virtual para cálculo da rotação em “D”.

<u>**Cálculo das reações de apoio**</u>

$$\mathbf{\Sigma F_H^{\rightarrow +} = 0} \qquad (2.9)$$

$$H_D' = 0$$

$$\mathbf{\Sigma F_V^{\uparrow +} = 0} \qquad (2.10)$$

$$V_D' + V_A' = 0$$

$$\mathbf{\Sigma M_{z_D}^{\circlearrowleft +} = 0} \qquad (2.11)$$

$$V'_A \cdot \left[5 + 4 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - 1 = 0$$

Reações de Apoio		
V_A' =0,085 $\frac{kN}{kN \cdot m}$	$H_D' = 0$	V_D' = -0,085 $\frac{kN}{kN \cdot m}$

Tabela 2.3 - Resumo das Reações do Sistema Virtual para cálculo da rotação em “D”.

As equações de esforços internos para o pórtico da Figura 2.7 estão apresentadas em (2.12), levando em consideração as seções já estabelecidas na Figura 2.5.

$$M'_{AB}(x) = V'_A \cdot x \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \leq x \leq 5$$

$$M'_{BC}(\alpha) = M'_{AB}(5) + V'_A \cdot [4 - 4 \cdot \cos(\alpha)] \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \tag{2.12}$$

$$M'_{DC}(\alpha) = V'_D \cdot \left[4 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4 \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right] + 1 \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$$

A rotação está demonstrada em (2.22).

2.4 Sistema virtual para cálculo de δ_{H_A} (figura 2.8)

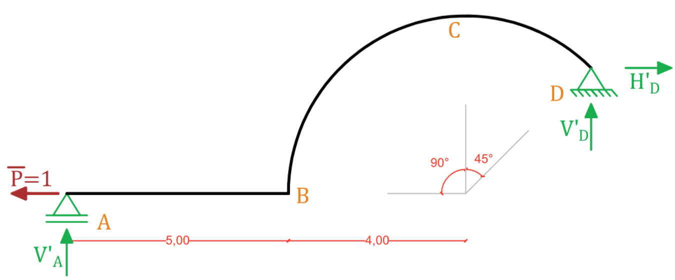


Figura 2.8 - Sistema Virtual para cálculo do deslocamento horizontal em “A”.

<u>Cálculo das reações de apoio</u>

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \mathbf{0} \tag{2.13}$$
$$H_D' - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{2.14}$$
$$V_D' + V_A' = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_D}}^{\circlearrowleft +} = \mathbf{0} \tag{2.15}$$
$$V'_A \cdot \left[5 + 4 + 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + 1 \cdot 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Reações de Apoio		
$V_A' = -0{,}239\ \frac{kN}{kN}$	$H_D' = 1\ \frac{kN}{kN}$	$V_D' = 0{,}239\ \frac{kN}{kN}$

Tabela 2.4 - Resumo das Reações de Apoio do Sistema Virtual para cálculo do deslocamento horizontal em “A”.

As equações de esforços internos para o pórtico da Figura 2.8 estão apresentadas em (2.16), levando em consideração as seções já estabelecidas na Figura 2.5.

$$M'_{AB}(x) = V'_A \cdot x \qquad \textbf{S}_1 \quad 0 \le x \le 5$$

$$M'_{BC}(\alpha) = M'_{AB}(5) + V'_A \cdot [4 - 4 \cdot \cos(\alpha)] + 1 \cdot 4 \cdot \text{sen}(\alpha) \qquad \textbf{S}_2 \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \qquad (2.16)$$

$$M'_{DC}(\alpha) = V'_D \cdot \left[4 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4 \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\right] + H'_D \cdot \left[4 \cdot sen\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 4 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad \textbf{S}_3 \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$$

O deslocamento horizontal é calculado conforme (2.23).

2.5 Cálculo de deslocamento e/ou rotação

<u>Consideração das variações de altura da seção transversal nos momentos de inércia:</u>

Barra AB



Figura 2.9 - Seção longitudinal da Barra AB.

Considerando a variação linear de altura da seção transversal, o cálculo é feito a partir de uma função polinomial do primeiro grau, conforme (2.17) e (2.18):

$$h_{AB}(x) = k_{1_{AB}} \cdot x + k_{2_{AB}} \qquad (2.17)$$

Onde,

$$\begin{cases} h_{AB}(0) = 0{,}2 \\ h_{AB}(5) = 0{,}4 \end{cases} \qquad (2.18)$$

$$h_{AB}(x) = 0{,}04 \cdot x + 0{,}2$$

A inércia é então calculada de acordo com a equação (2.19).

$$I_{AB}(x) = \frac{b \cdot \left(h_{AB}(x)\right)^3}{12} \qquad (2.19)$$

Barra BD

Para a barra BD (Figura 2.10) o cálculo é direto, utilizando a expressão do momento de inércia de seções retangulares, demonstrada em (2.20).

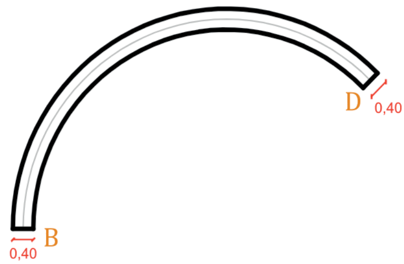


Figura 2.10 – Seção longitudinal da Barra BD.

$$I_{BD} = b \cdot \frac{(0{,}4)^3}{12} \tag{2.20}$$

Por fim, monta-se a integral para cálculo do deslocamento vertical na seção correspondente ao nó B conforme (2.21), utilizando as equações apresentadas em (2.4) e (2.8):

$$\boldsymbol{\delta_{V_B}} = \int_0^5 \frac{M_{AB}(x) \cdot M'_{AB}(x)}{E_c \cdot I_{AB}(x)} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{BC}(\alpha) \cdot M'_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_{BD}} \cdot 4 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M_{DC}(\alpha) \cdot M'_{DC}(\alpha)}{E_c \cdot I_{BD}} \cdot 4 \cdot d\alpha = \mathbf{0{,}42785}\ \boldsymbol{m} \tag{2.21}$$

A rotação na seção correspondente ao nó D é calculada de acordo com (2.22), utilizando as formulações explicitadas em (2.4) e (2.12):

$$\boldsymbol{\theta_D} = \int_0^5 \frac{M_{AB}(x) \cdot M'_{AB}(x)}{E_c \cdot I_{AB}(x)} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{BC}(\alpha) \cdot M'_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_{BD}} \cdot 4 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M_{DC}(\alpha) \cdot M'_{DC}(\alpha)}{E_c \cdot I_{BD}} \cdot 4 \cdot d\alpha = \mathbf{0{,}10512}\ \boldsymbol{rad} \tag{2.22}$$

Para cálculo do deslocamento horizontal na seção correspondente ao nó A a integral é desenvolvida conforme (2.23), utilizando as equações apresentadas em (2.4) e (2.16):

$$\boldsymbol{\delta_{H_A}} = \int_0^5 \frac{M_{AB}(x) \cdot M'_{AB}(x)}{E_c \cdot I_{AB}(x)} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{BC}(\alpha) \cdot M'_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_{BD}} \cdot 4 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M_{DC}(\alpha) \cdot M'_{DC}(\alpha)}{E_c \cdot I_{BD}} \cdot 4 \cdot d\alpha = \mathbf{0{,}08737}\ \boldsymbol{m} \tag{2.23}$$

3 EXERCÍCIO 3 (ISOSTÁTICO, QUADRO FECHADO, ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA)

Determinar o deslocamento vertical em C (δ_{V_C}) para o pórtico da Figura 3.1. Considerar os efeitos da flexão para as barras AB, ED, e arco BCD (seção transversal retangular); e os efeitos da normal no tirante AD (seção transversal circular).

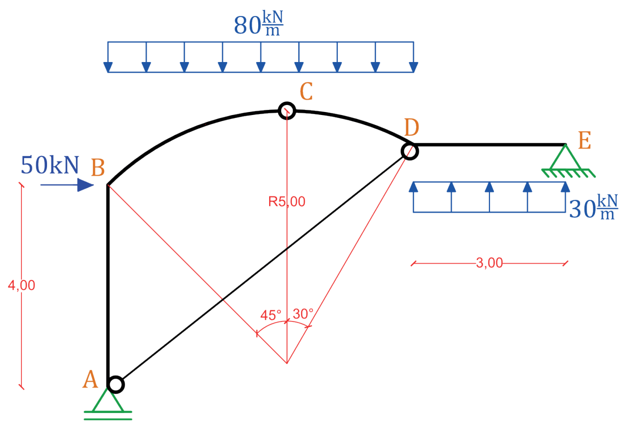


Figura 3.1 - Pórtico do Exercício 3 (todos os comprimentos em m, exceto quando indicado).

Dados do problema:

$E_c = 35\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal para as barras *AB*, *ED*, e arco *BCD*)

$b_c = 20\ cm$ (Base das seções transversais retangulares)

$h_c = 50\ cm$ (Altura das seções transversais retangulares)

$E_t = 200\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal do tirante)

$\phi_t = 100\ mm$ (Diâmetro da seção transversal circular do tirante)

O pórtico do problema 3 apresenta *3* reações de apoio que a princípio poderiam ser calculadas a partir das *3* equações disponíveis da estática no plano. No entanto, apresenta também um *anel* composto pelos nós $ABCD$. Essas estruturas fechadas (também chamadas de *quadros fechados* por autores como Süssekind (1980)) em pórticos planos acrescentam *3* incógnitas ao sistema, referentes aos possíveis esforços de normal, cortante e flexão transferidos pelas barras.

Ainda, a presença de rótulas onde duas ou menos barras convergem adiciona **1** equação, totalizando **3** ao todo. A rótula em C possui duas barras conectadas **(1 equação)**, enquanto que a articulação em A **(1 equação)** e D **(1 equação)** dividem o mesmo elemento (podendo-se considerar uma barra cada). A Equação (3.1) resume o cálculo do grau de hiperestaticidade (*g*) da estrutura em questão, provando-a ser isostática. A expressão foi adaptada de Martha (2022).

$$g = [\ (\ n^o de\ reações\ de\ apoio) + 3 \cdot (\ n^o de\ quadros\ fechados\ )\ ]$$
$$-\ [\ (\ 3\ equações\ da\ estática\ no\ plano\ )$$
$$+\ (n^o\ de\ equações\ advindas\ de\ articulações\ )\ ] \quad (3.1)$$

$$g = [(3) + 3 \cdot (1)] - [(3) + (3)] = 0$$

Estrutura Isostática

3.1 Sistema real (figura 3.2)

Para determinação das equações dos esforços internos relevantes, é necessário seccionar uma das barras do *quadro fechado*. O elemento escolhido foi o AD, já que possui somente esforços axiais por ser birrotulada e sem carregamentos transversais (características de barras de treliça). Sendo assim, a referida barra pode ser substituída por duas forças N_{AD}, conforme Figura 3.3.

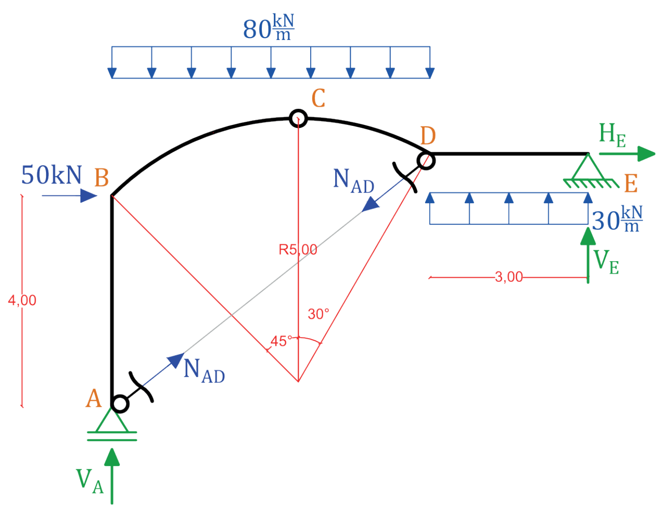


Figura 3.3 - Sistema Real do Exercício 3.

<u>Cálculo das reações de apoio</u>

$$\boldsymbol{\Sigma F_{H}^{\rightarrow +} = 0} \quad (3.2)$$
$$50 + H_E + N_{ADx} - N_{ADx} = 0$$

A Figura 3.4 mostra projeções horizontais do arco para determinação da resultante da carga distribuída. As medidas e e e_2 são calculadas segundo (3.3).

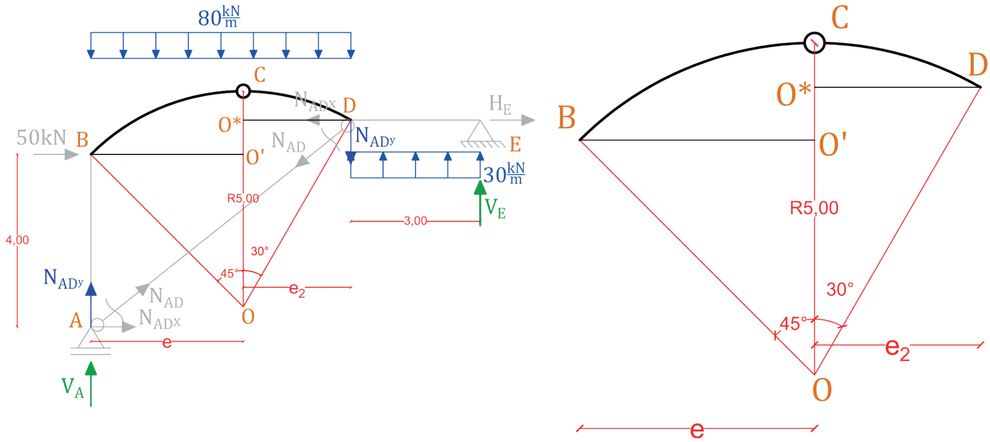


Figura 3.4 – Projeções horizontais do arco BCD no contexto da estrutura, e em detalhe.

$$e = 5 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3{,}53553\ m \text{ (comprimento } BO'\text{)} \tag{3.3}$$

$$e_2 = 5 \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2{,}5\ m \text{ (comprimento } DO^*\text{)}$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \boldsymbol{0} \tag{3.4}$$

$$V_A + V_E - 80\,.\,(e + e_2) + 30 \cdot 3 + N_{ADy} - N_{ADy} = 0$$

Conforme mostrado em (3.1), cada rótula do problema em questão adiciona uma equação para o equilíbrio. Sendo assim, (3.6) demonstra o cálculo do momento fletor da esquerda (nós ABC), enquanto que (3.7) calcula a partir da direita (nós EDC). A determinação dos sinais segue o ilustrado na Figura 1.4.

Para tanto, além das distâncias apresentadas na Figura 3.4, são necessárias projeções verticais do arco, demonstradas na Figura 3.5 e determinadas em (3.5).

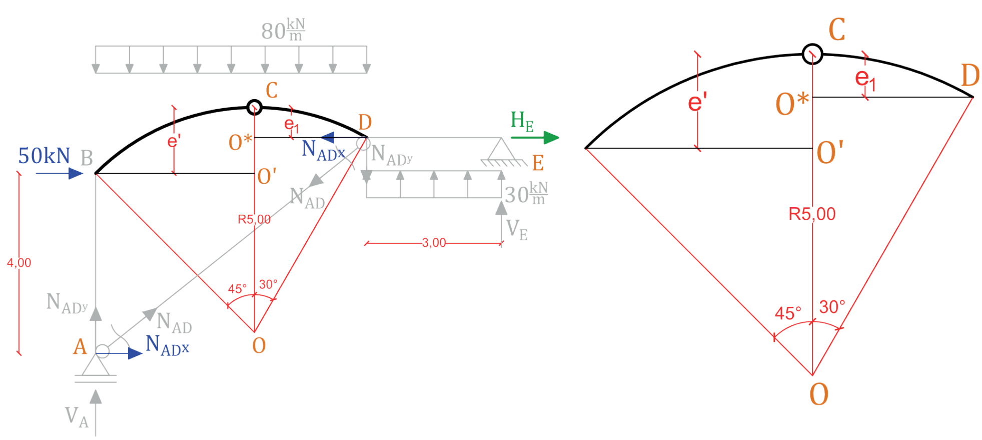


Figura 3.5 - Projeções verticais do arco BCD no contexto da estrutura, e em detalhe.

$$e_1 = 5 - 5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}66987\ m \text{ (Raio subtraído do comprimento } OO^*\text{)} \tag{3.5}$$

$$e' = 5 - 5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1{,}46447\ m \text{ (Raio subtraído do comprimento } OO'\text{)}$$

$$\boldsymbol{M_{z_{Rótula_{ABC}}} = 0} \tag{3.6}$$

$$V_A \cdot e - 50 \cdot e' - 80 \cdot e^2 \cdot \frac{1}{2} + N_{AD_y} \cdot e - N_{AD_x} \cdot (4 + e') = 0$$

$$\boldsymbol{M_{z_{Rótula_{EDC}}} = 0}$$

$$H_E \cdot e_1 + V_E \cdot (3 + e_2) - N_{AD_y} \cdot e_2 - N_{AD_x} \cdot e_1 + 30 \cdot 3 \cdot (1{,}5 + e_2) - 80 \cdot (e_2)^2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_A}{}^{\circlearrowleft +} = 0}$$

$$V_E \cdot (3 + e_2 + e) - H_E \cdot (e' - e_1 + 4) + 30 \cdot 3 \cdot (1{,}5 + e_2 + e) - 80 \cdot (e_2 + e)^2 \cdot \frac{1}{2} - 50 \cdot 4 = 0 \tag{3.8}$$

As reações estão resumidas na Tabela 3.1, enquanto que as seções transversais utilizadas estão dispostas na Figura 3.6, e as respectivas equações são apresentadas em (3.9).

Reações de Apoio		
$V_A = 311{,}035\ kN$	$V_E = 81{,}808\ kN$	$H_E = -50\ kN$
$N_{ADx} = 198{,}222\ kN$	$N_{ADy} = 157{,}467\ kN$	

Tabela 3.1 – Resumo das Reações de Apoio e componentes do tirante no Sistema Real.

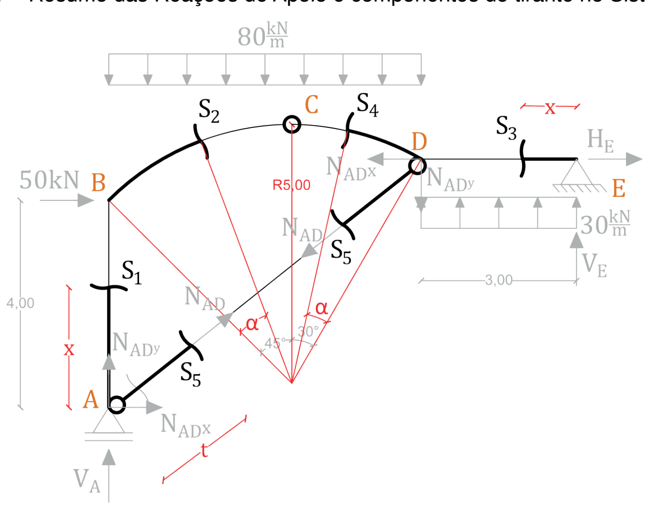


Figura 3.6 - Determinação das seções para as equações de Momento Fletor.

$$M_{AB}(x) = -N_{AD_x} \cdot x$$

S1
$0 \leq x \leq 4$

$$M_{BC}(\alpha) = M_{AB}(4) + (N_{AD_y} + V_A) \cdot [5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)] - \left(N_{AD_x} + 50\right) \cdot \left[5 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - 5 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - 80 \cdot \frac{\left[5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right]^2}{2} \quad (3.9)$$

S2
$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$

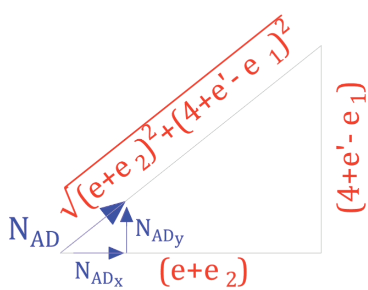
$$M_{ED}(x) = V_E \cdot x + 15 \cdot x^2$$

S3
$0 \leq x \leq 3$

$$M_{DC}(\alpha) = M_{ED}(3) + (-N_{AD_x} + H_E) \cdot [5 \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - 5 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)] + (V_E - N_{AD_y}) \cdot [5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)] + 30 \cdot 3 \cdot [\left(5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right] - 80 \cdot \frac{\left[5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\right]^2}{2}$$

S4
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

O valor da Normal N_{AD} é calculado a partir da soma vetorial das componentes apresentadas na Tabela 3.1. A Figura 3.7 apresenta a semelhança de triângulos entre os vetores e a geometria da barra inclinada. A equação de Esforço Axial está exposta em (3.10).



$$\frac{N_{AD}}{\sqrt{(e + e_2)^2 + (4 + e' - e_1)^2}} = \frac{N_{AD_x}}{e + e_2} = \frac{N_{AD_y}}{4 + e' - e_1}$$

Figura 3.7 – Semelhança de triângulos para determinação da Normal N_{AD}.

$$N_{AD}(t) = \sqrt{(e+e_2)^2 + (4+e'-e_1)^2} \cdot \frac{N_{AD_x}}{e+e_2} = 253{,}15575\ kN \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_5} \\ 0 \leq t \leq 7{,}70816 \end{matrix} \quad (3.10)$$

3.2 Sistema virtual (figura 3.8)

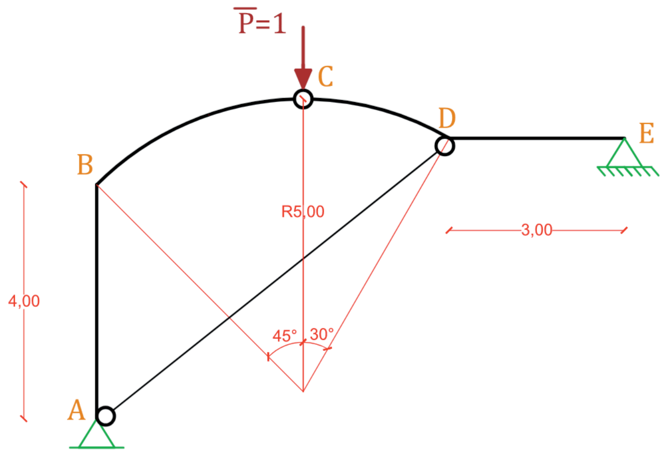


Figura 3.8 - Sistema Virtual do Exercício 3 para cálculo de δ_{v_C}.

As reações de apoio são determinadas de maneira semelhante ao exibido anteriormente para o Sistema Real, conforme Figura 3.9.

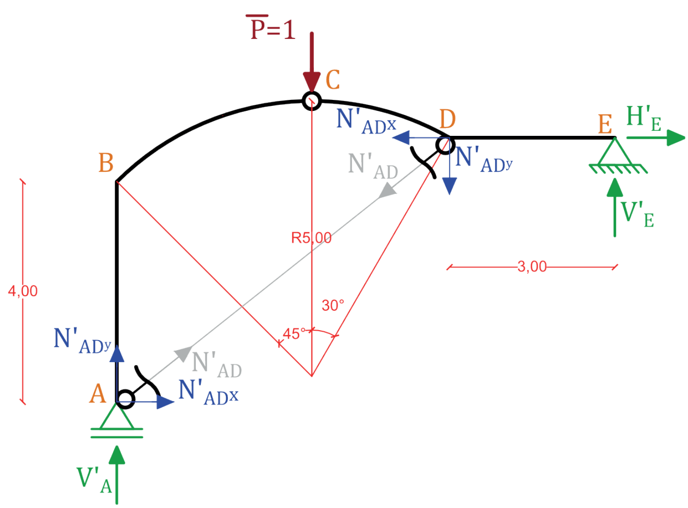


Figura 3.9 - Sistema Virtual do Exercício 3.

Cálculo das reações de apoio

Os detalhes de projeções verticais e horizontais do arco estão exibidos na Figura 3.4 e na Figura 3.5, e os valores das distâncias e, e', e_1, e_2, calculadas em (3.3) e (3.5).

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \mathbf{0} \tag{3.11}$$

$$H'_E + N'_{ADx} - N'_{ADx} = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{3.12}$$

$$V'_A + V'_E - 1 + N'_{ADy} - N'_{ADy} = 0$$

$$\boldsymbol{M_{z_{Rótula_{ABC}}}} = \mathbf{0} \tag{3.13}$$

$$V'_A \cdot e + N'_{ADy} \cdot e - N'_{ADy} \cdot (4 + e') = 0$$

$$\boldsymbol{M_{z_{Rótula_{EDC}}}} = \mathbf{0} \tag{3.14}$$

$$H'_E \cdot e_1 + V'_E \cdot (3 + e_2) - N'_{ADy} \cdot e_2 - N'_{ADx} \cdot e_1 = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_A}}^{\circlearrowleft +} = \mathbf{0}$$

$$V'_E \cdot (3 + e_2 + e) - H'_E \cdot (e' - e_1 + 4) - 1 \cdot e = 0 \tag{3.15}$$

Reações de Apoio		
$V'_A = 0{,}609\ \frac{kN}{kN}$	$V'_E = 0{,}391\ \frac{kN}{kN}$	$H'_E = 0$
$N'_{ADx} = 0{,}810\ \frac{kN}{kN}$	$N'_{ADy} = 0{,}644\ \frac{kN}{kN}$	

Tabela 3.2 – Resumo das Reações de Apoio e componentes do tirante no Sistema Virtual.

Considerando que as seções transversais foram especificadas na Figura 3.6, as equações de esforços ficam conforme (3.16).

$$M'_{AB}(x) = -N'_{AD_x} \cdot x \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$M'_{BC}(\alpha) = M'_{AB}(4) + (N'_{AD_y} + V'_A) \cdot [5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)] - \left(N'_{AD_x}\right) \cdot [\left(5 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - 5 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)] \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$$

$$M'_{ED}(x) = V'_E \cdot x \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \leq x \leq 3 \tag{3.16}$$

$$M'_{DC}(\alpha) = M'_{ED}(3) + (-N'_{AD_x} + H'_E) \cdot [5 \cdot sen\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - 5$$

$\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)] + (V'_E - N'_{AD_y}) \cdot [5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 5 \cdot cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)]$ **S4** $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

$N'_{AD}(x) = \sqrt{(e + e_2)^2 + (4 + e' - e_1)^2} \cdot \frac{N'_{AD_x}}{e + e_2} = 1{,}03489 \frac{kN}{kN}$ **S5** $0 \leq t \leq 7{,}70816$

3.3 Cálculo de deslocamento e/ou rotação

De posse das equações (3.9), (3.10), e (3.16), monta-se a integral para cálculo do deslocamento solicitado no problema. A parcela do esforço Normal que será considerada para a barra AD é calculada dividindo-se as duas equações do tirante pela rigidez axial $E_t \cdot A_t$, demonstrado em (3.17).

$$\boldsymbol{\delta}_{V_C} = \int_0^4 \frac{M_{AB}(x) \cdot M'_{AB}(x)}{E_c \cdot I_c} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M_{BC}(\alpha) \cdot M'_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_c} \cdot 5 \cdot d\alpha + \int_0^3 \frac{M_{ED}(x) \cdot M'_{ED}(x)}{E_c \cdot I_c} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{M_{DC}(\alpha) \cdot M'_{DC}(\alpha)}{E_c \cdot I_c} \cdot 5 \cdot d\alpha + \int_0^{7,70816} \frac{N_{AD}(x) \cdot N'_{AD}(x)}{E_t \cdot A_t} \cdot dx = \mathbf{0,11303\ m} \quad (3.17)$$

Fomentando a discussão a respeito das contribuições de esforços internos no valor final dos deslocamentos, destaca-se que, para o caso, a parcela axial contribuiu com $1{,}29$ mm em relação ao valor final de $113{,}03\ mm$, representando em torno de $1{,}14\%$.

4 EXERCÍCIO 4 (HIPERESTÁTICO, ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA)

Para o pórtico da Figura 4.1, calcular o deslocamento vertical da seção correspondente ao nó A (δ_{V_A}), no topo do arco de circunferência, considerando somente os efeitos da flexão.

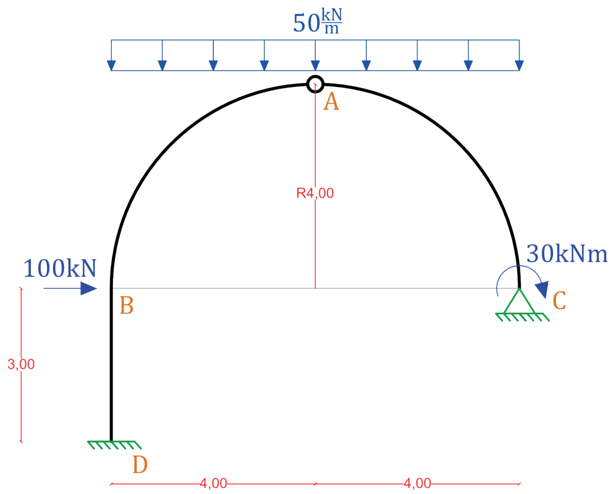


Figura 4.1 – Pórtico do Exercício 4 (todos os comprimentos em m, exceto quando indicado)

Dados do problema:

$E_c = 25\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$b = 20\ cm$ (Base das seções transversais retangulares)

$h = 60\ cm$ (Altura das seções transversais retangulares)

O pórtico do problema possui *5* reações de apoio no total. As *3* condições de equilíbrio da estática no plano somadas à presença da rótula em A totalizam *4* equações disponíveis resultando num grau de hiperestaticidade igual a *1*.

4.1 Sistema principal do sistema real (figura 4.2)

A Figura 4.2 ilustra a configuração auxiliar do pórtico, agora isostático. Para o Sistema [0] do Sistema Real, remove-se o hiperestático X_1 a fim de calcular os esforços internos, conforme mostrado no Tópico 4.1.1.

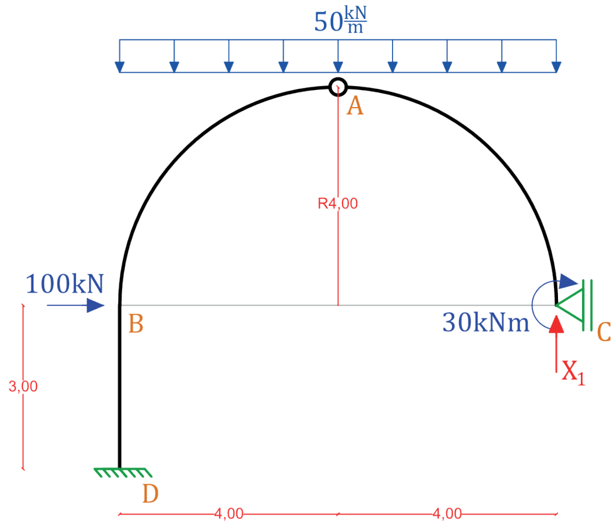


Figura 4.2 - Sistema Principal do Sistema Real do Exercício 4.

4.1.1 Sistema [0] do Sistema Real (Figura 4.3)

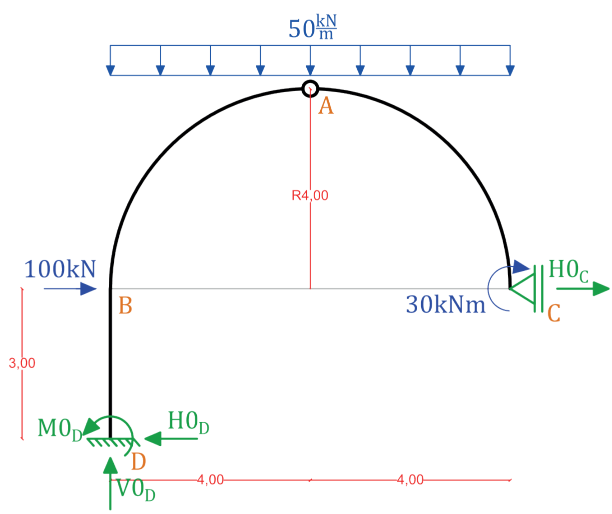


Figura 4.3 - Sistema [0] do Sistema Real.

<u>Cálculo das reações de apoio</u>

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \mathbf{0} \tag{4.1}$$

$$H0_C - H0_D + 100 = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

$$V0_D - 50 \cdot 8 = 0$$

Nas rótulas o momento fletor é nulo. Sendo assim, será feito o cálculo de flexão a partir do nó D até o nó A (Equação (4.3)), e do nó C até o A (Equação (4.4)). A convenção utilizada seguirá, sempre que possível, o estabelecido na Figura 1.4.

$$\boldsymbol{M_{z_{Rótula_{DBA}}} = 0} \tag{4.3}$$
$$V0_D \cdot 4 + H0_D \cdot 7 - 100 \cdot 4 - 50 \cdot 4 \cdot 2 - M0_D = 0$$

$$\boldsymbol{M_{z_{Rótula_{CA}}} = 0} \tag{4.4}$$
$$-30 + H0_C \cdot 4 - 50 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

As reações de apoio calculadas a partir das Equações (4.1) a (4.4) estão resumidas na Tabela 4.1.

Reações de Apoio			
$V0_D = 400\ kN$	$H0_D = 207{,}5\ kN$	$M0_D = 2252{,}5\ kN \cdot m$	$H0_C = 107{,}5\ kN$

Tabela 4.1 – Resumo das Reações de Apoio no Sistema [0] do Sistema Real.

A Figura 4.4 apresenta as seções transversais utilizadas na determinação das equações de momento fletor para cada trecho do pórtico da Figura 4.3. A opção de eixo nas barras tomou como base o definido na Figura 1.2 e Figura 1.3.

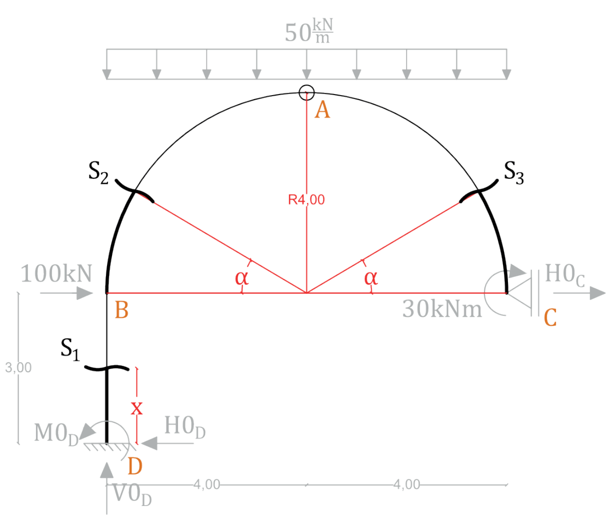


Figura 4.4 – Determinação das seções para as equações de Momento Fletor.

As equações estão dispostas em (4.5).

$$M0_{DB}(x) = -M0_D + H0_D \cdot x \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_1} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{matrix}$$

$$M0_{BA}(\alpha) = M0_{DB}(3) + V0_D \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] + (H0_D - 100) \cdot 4 \cdot sen(\alpha) - 50 \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] \cdot 4 \cdot \frac{[1 - cos(\alpha)]}{2} \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_2} \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{matrix} \qquad (4.5)$$

$$M0_{CA}(\alpha) = -30 - 50 \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] \cdot 4 \cdot \frac{[1 - cos(\alpha)]}{2} + H0_C \cdot 4 \cdot sen(\alpha) \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_3} \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

4.1.2 Sistema [1] do Sistema Real (Figura 4.5)

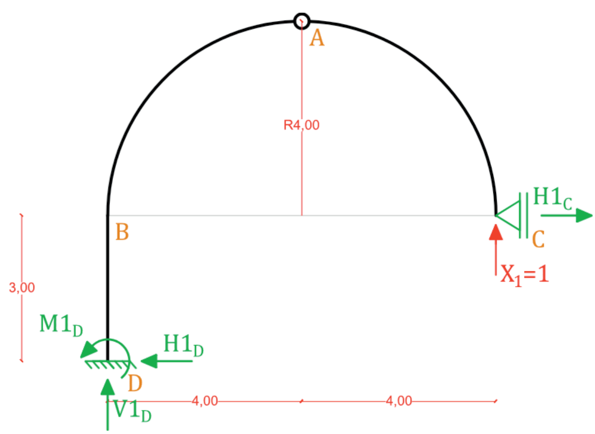


Figura 4.5 - Sistema [1] do Sistema Real

<u>Cálculo das reações de apoio:</u>

$$\mathbf{\Sigma F_H^{\rightarrow +} = 0} \qquad (4.6)$$

$$H1_C - H1_D = 0$$

$$\mathbf{\Sigma F_V^{\uparrow +} = 0} \qquad (4.7)$$

$$V1_D + 1 = 0$$

$$\boldsymbol{M}_{Z_{Rótula_{DBA}}} = \mathbf{0}$$
$$V1_D \cdot 4 + H1_D \cdot 7 - M1_D = 0 \tag{4.8}$$

$$\boldsymbol{M}_{Z_{Rótula_{CA}}} = \mathbf{0}$$
$$H1_C \cdot 4 + 1 \cdot 4 = 0 \tag{4.9}$$

Reações de Apoio			
$V1_D = -1\,\frac{kN}{kN}$	$H1_D = -1\,\frac{kN}{kN}$	$M1_D = -11\,\frac{kN \cdot m}{kN}$	$H1_C = -1\,\frac{kN}{kN}$

Tabela 4.2 – Resumo das Reações de Apoio no Sistema [1] do Sistema Real.

Os esforços internos para o Sistema [1], da Figura 4.5, estão resumidos em (4.10).

$$M1_{DB}(x) = -M1_D + H1_D \cdot x \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$M1_{BA}(\alpha) = M1_{DB}(3) + V1_D \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] + H1_D \cdot 4 \cdot sen(\alpha) \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \tag{4.10}$$

$$M1_{CA}(\alpha) = 1 \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] + H1_C \cdot 4 \cdot sen(\alpha) \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

4.1.3 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Real

O cálculo dos coeficientes de flexibilidade e termos de carga visando a determinação das reações de apoio do pórtico hiperestático da Figura 4.1 está apresentado em (4.11). Para os casos de arco de circunferência, o eixo *ds* da integral é convertido para $ds = \mathrm{R} \cdot d\alpha$, de acordo com o explícito na Figura 1.3.

$$\boldsymbol{\delta_{10}} = \int_0^3 \frac{M0_{DB}(x) \cdot M1_{DB}(x)}{E_c \cdot I} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha) \cdot M1_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CA}(\alpha) \cdot M1_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha = \boldsymbol{-9,6207065548 \cdot 10^{-1}\, m} \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{\delta_{11}} = \int_0^3 \frac{[M1_{DB}(x)]^2}{E_c \cdot I} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M1_{BA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M1_{CA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha = \mathbf{4,656931774 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{kN}}$$

A compatibilização dos deslocamentos e rotações está demonstrada em (4.12).

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \qquad (4.12)$$

$$X_1 = 206{,}5889521613\ kN$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Real</u> (→⁺, ↑⁺, ↺⁺)

$$\begin{aligned}
V_D &= V0_D + V1_D \cdot X_1 = 193{,}4110478387\ kN &&\Rightarrow |V_D| = 193{,}4110478387\ kN\ \uparrow \\
H_D &= -H0_D - H1_D \cdot X_1 = -0{,}9110478387\ kN &&\Rightarrow |H_D| = 0{,}9110478387\ kN\ \leftarrow \\
M_D &= M0_D + M1_D \cdot X_1 = -19{,}978473774\ kN \cdot m &&\Rightarrow |M_D| = 19{,}978473774\ kN \cdot m\ \circlearrowright \\
V_C &= X_1 = 206{,}5889521613\ kN &&\Rightarrow |V_C| = 206{,}5889521613\ kN\ \uparrow \\
H_C &= H0_C + H1_C \cdot X_1 = -99{,}0889521613\ kN &&\Rightarrow |H_C| = 99{,}0889521613\ kN\ \leftarrow
\end{aligned} \qquad (4.13)$$

As reações de apoio da estrutura hiperestática da Figura 4.1 estão resumidas em (4.13) e dispostas no seu sentido correto na Figura 4.6, coincidindo com o indicado pelas setas localizadas à direita dos respectivos valores em módulo. Parte-se então para a determinação das equações de esforços internos, presentes em (4.14).

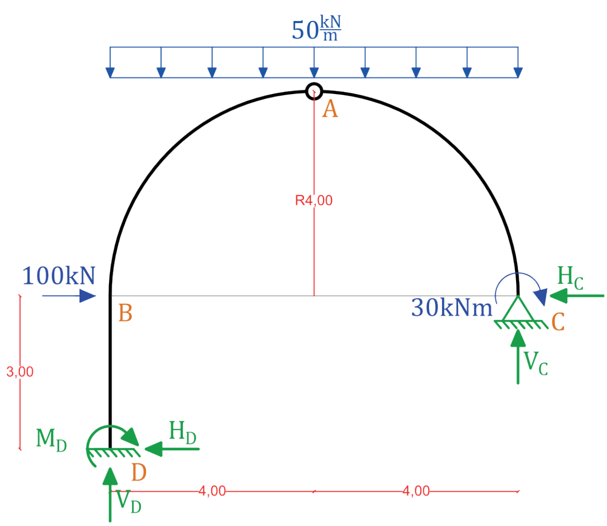


Figura 4.6 –Reações de apoio do Sistema Real.

$$M_{DB}(x) = M_D + H_D \cdot x \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$M_{BA}(\alpha) = M_{DB}(3) + V_D \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] + (H_D - 100) \cdot 4 \cdot sen(\alpha) - 50 \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] \cdot 4 \cdot \frac{[1 - cos(\alpha)]}{2} \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \tag{4.14}$$

$$M_{CA}(\alpha) = -30 - 50 \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] \cdot 4 \cdot \frac{[1 - cos(\alpha)]}{2} - H_C \cdot 4 \cdot sen(\alpha) + V_C \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

As Equações em (4.14) encerram a etapa do Sistema Real, pois são calculadas com as reações de apoio do pórtico hiperestático resolvidas pelo Método das Forças e apresentadas em (4.13). A seguir, aplica-se metodologia semelhante para determinação dos esforços internos no Sistema Virtual.

4.2 Sistema principal do sistema virtual (figura 4.7)

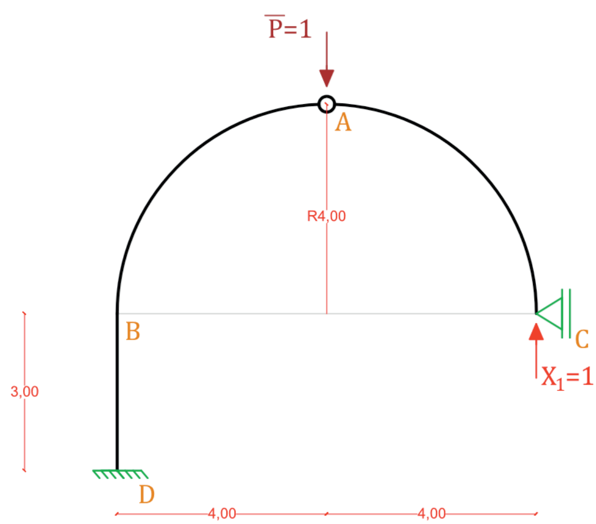


Figura 4.7 - Sistema principal do Sistema Virtual do Exercício 4.

4.2.1 Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 4.8)

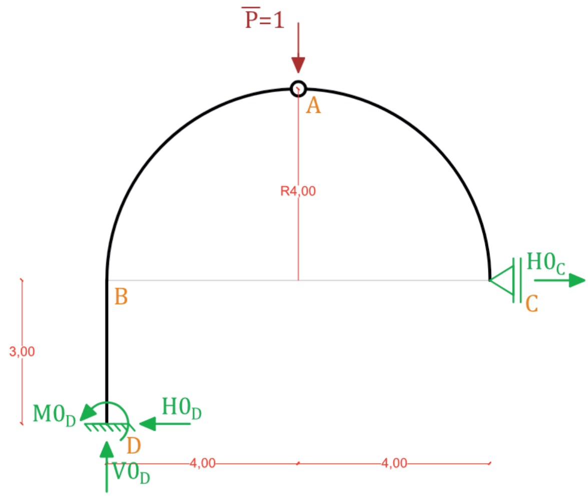


Figura 4.8 - Sistema [0] do Sistema Virtual

<u>Cálculo das reações de apoio:</u>

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \mathbf{0} \tag{4.15}$$
$$H0_C - H0_D = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{4.16}$$
$$V0_D - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{M_{Z_{Rótula_{DBA}}}} = \mathbf{0} \tag{4.17}$$
$$V0_D \cdot 4 + H0_D \cdot 7 - M0_D = 0$$

$$\boldsymbol{M_{Z_{Rótula_{CA}}}} = \mathbf{0} \tag{4.18}$$
$$H0_C \cdot 4 = 0$$

Reações de Apoio			
$V0_D = 1\dfrac{kN}{kN}$	$H1_D = 0$	$M0_D = 4\dfrac{kN \cdot m}{kN}$	$H0_C = 0$

Tabela 4.3 – Resumo das Reações de Apoio no Sistema [1] do Sistema Virtual.

$$M0_{DB}(x) = -M0_D$$

S₁
$0 \leq x \leq 3$

$$M0_{BA}(\alpha) = M0_{DB}(3) + V0_D \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \tag{4.19}$$

$$M0_{CA}(\alpha) = 0 \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

O **Sistema [1] do Sistema Virtual** é igual ao **Sistema [1] do Sistema Real** para o pórtico 3.2. Os respectivos cálculos e figuras estão dispostos em detalhes no tópico 4.1.2. Sendo assim, parte-se direto para a determinação dos coeficientes de flexibilidades e termos de carga.

4.2.2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual

As reações de apoio do pórtico hiperestático demonstrado na Figura 4.7 são determinadas a partir da compatibilização dos deslocamentos e rotações calculados pelas mesmas integrais expressas em (4.11), menos a parcela referente ao elemento CA, que é nula em função do valor de $M0_{CA}(\alpha)$ em (4.19). Os valores atualizados estão em (4.20).

$$\boldsymbol{\delta_{10} = -2,1807275829 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{kN}} \tag{4.20}$$
$$\boldsymbol{\delta_{11} = 4,656931774 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{kN}}$$

Seguindo a metodologia do Método das Forças, X_1 é determinado conforme (4.21), e as reações de apoio estão calculadas em (4.22).

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \tag{4.21}$$
$$X_1 = 0{,}4682756134\,\frac{kN}{kN}$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Virtual</u> (→⁺, ↑⁺, ↺⁺)

$$V'_D = V0_D + V1_D \cdot X_1 = 0{,}5317243866\,\frac{kN}{kN} \quad \Rightarrow \quad |V'_D| = 0{,}5317243866\,\frac{kN}{kN}\ \uparrow$$
$$H'_D = -H0_D - H1_D \cdot X_1 = 0{,}4682756134\,\frac{kN}{kN} \quad \Rightarrow \quad |H'_D| = 0{,}4682756134\,\frac{kN}{kN}\ \rightarrow$$
$$M'_D = M0_D + M1_D \cdot X_1 = -1{,}151031747\,\frac{kN \cdot m}{kN} \quad \Rightarrow \quad |M'_D| = 1{,}151031747\,\frac{kN \cdot m}{kN}\ \circlearrowright \tag{4.22}$$
$$V'_C = X_1 = 0{,}4682756134\,\frac{kN}{kN} \quad \Rightarrow \quad |V'_D| = 0{,}4682756134\,\frac{kN}{kN}\ \uparrow$$
$$H'_C = H0_C + H1_C \cdot X_1 = -0{,}4682756134\,\frac{kN}{kN} \quad \Rightarrow \quad |H'_C| = 0{,}4682756134\,\frac{kN}{kN}\ \leftarrow$$

A Figura 4.9 mostra o pórtico do Sistema Virtual com suas reações nos sentidos corretos.

As equações de Momento Fletor são apresentadas em (4.23).

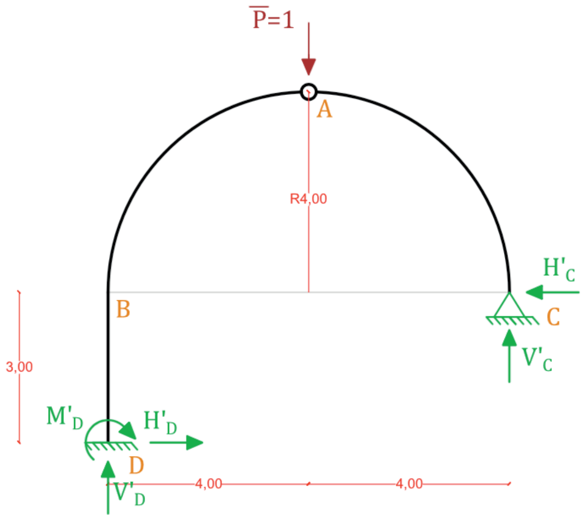


Figura 4.9 – Disposição das reações de apoio do Sistema Virtual.

$$M'_{DB}(x) = M'_D - H'_D \cdot x \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$M'_{BA}(\alpha) = M'_{DB}(3) + V'_D \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] - H'_D \cdot 4 \cdot sen(\alpha) \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \tag{4.23}$$

$$M'_{CA}(\alpha) = -H'_C \cdot 4 \cdot sen(\alpha) + V'_C \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

4.3 Cálculo de deslocamento e/ou rotação

A integral para determinação do deslocamento vertical no topo do arco está apresentada em (4.24), reunindo as equações de (4.14) e (4.23):

$$\boldsymbol{\delta_{V_A}} = \int_0^3 \frac{M_{DB}(x) \cdot M'_{DB}(x)}{E_c \cdot I} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{BA}(\alpha) \cdot M'_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{CA}(\alpha) \cdot M'_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha = \mathbf{5{,}64981\ mm} \tag{4.24}$$

5 EXERCÍCIO 5 (HIPERESTÁTICO, BARRA INCLINADA, ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA)

Calcular o deslocamento horizontal em B (δ_{H_B}), deslocamento vertical e rotação em C (δ_{V_C} e θ_c) da Figura 5.1. Considerar somente os efeitos de flexão.

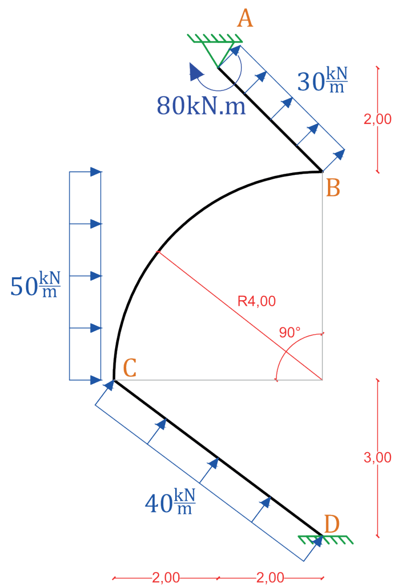


Figura 5.1 - Pórtico do Exercício 5 (todos os comprimentos em m, exceto quando indicado).

Dados do problema:

$E_c = 30\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$b = 200\ mm$ (Base das seções transversais retangulares)

$h = 400\ mm$ (Altura das seções transversais retangulares)

O pórtico em estudo possui *5* reações de apoio no total. As *3* equações de equilíbrio da estática no plano em comparação às reações incógnitas resultam num grau de hiperestaticidade igual a *2*.

5.1 Sistema principal do sistema real (figura 5.2)

A Figura 5.2 ilustra a nova configuração do pórtico, agora isostático.

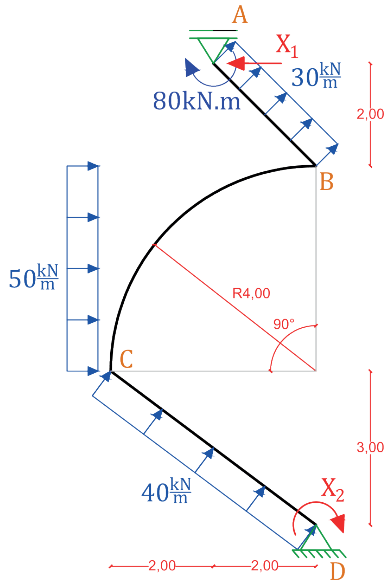


Figura 5.2 - Sistema Principal do Sistema Real do Exercício 5

Para o Sistema [0] do Sistema Real, remove-se os hiperestáticos X_1 e X_2.

5.1.1 Sistema [0] do Sistema Real (Figura 5.3)

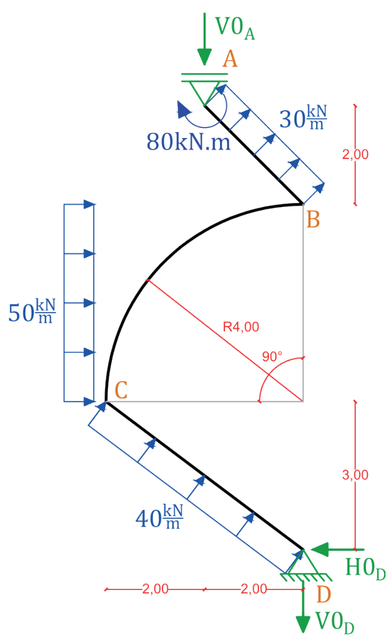


Figura 5.3 - Sistema [0] do Sistema Real

A partir das projeções *x* e *y* dos carregamentos distribuídos, parte-se para o cálculo das reações de apoio do Exercício 5. A Figura 5.4 exemplifica como a análise para a resultante da carga de $40kN/m$ foi feita, e a posição do ângulo α para a decomposição da carga.

Procedimentos análogos foram empregados para os demais carregamentos distribuídos.

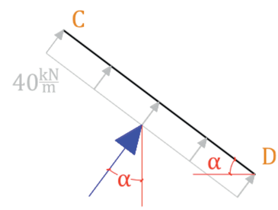


Figura 5.4 - Indicação do ângulo α para decomposição da carga distribuída de $40kN/m$.

<u>Cálculo das reações de apoio</u>

$$\Sigma F_{H}^{\rightarrow +} = 0 \tag{5.1}$$

$$30 \cdot 2 + 50 \cdot 4 + 40 \cdot 3 - H0_{D} = 0$$

$$\Sigma F_{V}^{\uparrow +} = 0 \tag{5.2}$$

$$30 \cdot 2 + 40 \cdot 4 - V0_{D} - V0_{A} = 0$$

$$\Sigma M_{z_D}^{\circlearrowleft +} = 0 \tag{5.3}$$

$$V0_{A} \cdot 2 - 30 \cdot 2 \cdot 1 - 30 \cdot 2 \cdot 8 - 50 \cdot 4 \cdot 5 - 40 \cdot 5 \cdot 2{,}5 - 80 = 0$$

As reações de apoio calculadas a partir das Equações (5.1) a (5.3) estão resumidas na Tabela 5.1.

Reações de Apoio		
$V0_{A} = 1060\ kN$	$H0_{D} = 380\ kN$	$V0_{D} = -840\ kN$

Tabela 5.1 - Resumo das Reações de Apoio no Sistema [0] do Sistema Real.

As equações de esforços internos para o pórtico da Figura 5.3 estão apresentadas em (5.4). A Figura 5.5 exemplifica as seções para determinação das equações de momento fletor. Em relação à escolha do eixo para as barras inclinadas, utilizou-se a mesma lógica estabelecida na Figura 1.2 e Figura 1.3.

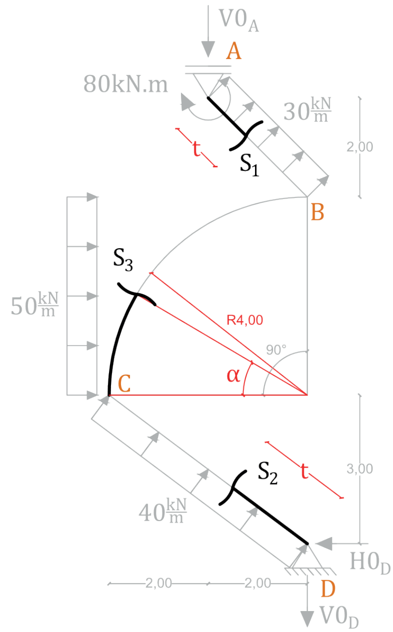


Figura 5.5 - Determinação das seções para as equações de Momento Fletor.

$$M0_{AB}(t) = -V0_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + 80 + 30 \cdot t \cdot \frac{t}{2} \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \le t \le 2\sqrt{2}$$

$$M0_{DC}(t) = -V0_D \cdot \left(\frac{4t}{5}\right) + 40 \cdot t \cdot \frac{t}{2} - H0_D \cdot \left(\frac{3t}{5}\right) \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \le t \le 5 \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} M0_{CB}(\alpha) = {} & M0_{DC}(5) + (V0_D - 40 \cdot 4) \cdot 4 \cdot [1 - \cos(\alpha)] \\ & + (-H0_D + 40 \cdot 3) \cdot 4 \cdot [sen(\alpha)] \\ & + \left(50 \cdot 4 \cdot sen(\alpha) \cdot \frac{4 \cdot sen(\alpha)}{2}\right) \end{aligned} \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

5.1.2 Sistema [1] do Sistema Real (Figura 5.6)

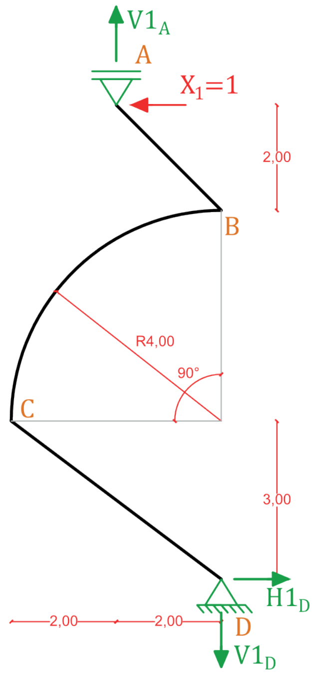


Figura 5.6 - Sistema [1] do Sistema Real

<u>Cálculo das reações de apoio:</u>

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \mathbf{0} \tag{5.5}$$

$H1_D - 1 = 0$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{5.6}$$

$-V1_D + V1_A = 0$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_D}}^{\circlearrowleft +} = \mathbf{0} \tag{5.7}$$

$-V1_A \cdot 2 + 1 \cdot 9 = 0$

Reações de Apoio		
$V1_A = 4{,}5\frac{kN}{kN}$	$H1_D = 1\frac{kN}{kN}$	$V1_D = 4{,}5\frac{kN}{kN}$

Tabela 5.2 – Resumo das Reações de Apoio no Sistema [1] do Sistema Real

As equações de esforços internos para o pórtico da Figura 5.6 estão dispostas em (5.8)

$$M1_{AB}(t) = V1_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 1 \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_1} \\ 0 \le t \le 2\sqrt{2} \end{matrix}$$

$$M1_{DC}(t) = -V1_D \cdot \left(\frac{4t}{5}\right) + 1 \cdot \left(\frac{3t}{5}\right) \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_2} \\ 0 \le t \le 5 \end{matrix} \tag{5.8}$$

$$M1_{CB}(\alpha) = M1_{DC}(5) + V1_D \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] + 1 \cdot 4 \cdot sen(\alpha) \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_3} \\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

5.1.3 Sistema [2] do Sistema Real (Figura 5.7)

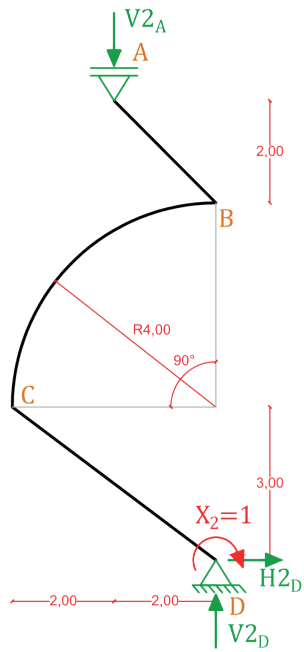


Figura 5.7 - Sistema [2] do Sistema Real.

<u>Cálculo das reações de apoio:</u>

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \mathbf{0} \tag{5.9}$$
$$H2_D = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{5.10}$$
$$V2_D - V2_A = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_D}}^{\circlearrowleft +} = \mathbf{0} \tag{5.11}$$
$$V2_A \cdot 2 - 1 = 0$$

Reações de Apoio		
$V2_A = 0{,}5\,\dfrac{kN}{kN \cdot m}$	$H2_D = 0$	$V2_D = 0{,}5\,\dfrac{kN}{kN \cdot m}$

Tabela 5.3 – Resumo das Reações de Apoio no Sistema [2] do Sistema Real

As equações de esforços internos para o pórtico da Figura 5.7 estão apresentadas em (5.12).

$$M2_{AB}(t) = -V2_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \leq t \leq 2\sqrt{2}$$

$$M2_{DC}(t) = V2_D \cdot \left(\frac{4t}{5}\right) - 1 \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \leq t \leq 5 \tag{5.12}$$

$$M2_{CB}(\alpha) = M2_{DC}(5) - V2_D \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

5.1.4 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Real

O cálculo dos coeficientes de flexibilidade e termos de carga visando a determinação das reações de apoio do pórtico hiperestático da Figura 5.1 está apresentado em (5.13). Para os casos de arco de circunferência, o eixo *ds* da integral é convertido para $ds = R \cdot d\alpha$, de acordo com o explícito na Figura 1.3.

$$\boldsymbol{\delta_{10}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M0_{AB}(t) \cdot M1_{AB}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{5} \frac{M0_{DC}(t) \cdot M1_{DC}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CB}(\alpha) \cdot M1_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha = \mathbf{-5,1810908472}\ \boldsymbol{m} \tag{5.13}$$

$$\boldsymbol{\delta_{20}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M0_{AB}(t) \cdot M2_{AB}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{5} \frac{M0_{DC}(t) \cdot M2_{DC}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CB}(\alpha) \cdot M2_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha = \mathbf{3,3789624885 \cdot 10^{-1}}\ \boldsymbol{rad}$$

$$\boldsymbol{\delta_{11}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M1_{AB}(t)^2}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{5} \frac{M1_{DC}(t)^2}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M1_{CB}(\alpha)^2}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha$$

$$= \mathbf{2,8808994157 \cdot 10^{-2}} \, \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{12}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M1_{AB}(t) \cdot M2_{AB}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{5} \frac{M1_{DC}(t) \cdot M2_{DC}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M1_{CB}(\alpha) \cdot M2_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha$$

$$= \mathbf{-1,7202048357 \cdot 10^{-3}} \, \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{22}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M2_{AB}(t)^2}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{5} \frac{M2_{DC}(t)^2}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{CB}(\alpha)^2}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha$$

$$= \mathbf{1,7059473843 \cdot 10^{-4}} \, \frac{\boldsymbol{rad}}{\boldsymbol{kN \cdot m}}$$

Visando a determinação dos hiperestáticos, a equação (5.14) mostra a compatibilização dos deslocamentos e rotações calculados em (5.13).

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{12} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = 154{,}7466523899 \, kN$$
$$X_2 = -420{,}2961343564 \, kN \cdot m \tag{5.14}$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Real</u> (→⁺, ↑⁺, ↺⁺)

$$V_A = -V0_A + V1_A \cdot X_1 - V2_A \cdot X_2 = -153{,}4919970672 \, kN \quad \Rightarrow \quad |V_A| = 153{,}4919970672 \, kN \downarrow$$

$$H_A = -X_1 = -154{,}7466523899 \, kN \quad \Rightarrow \quad |H_A| = 154{,}7466523899 \, kN \leftarrow$$

$$V_D = -V0_D - V1_D \cdot X_1 + V2_D \cdot X_2 = -66{,}5080029328 \, kN \quad \Rightarrow \quad |V_D| = 66{,}5080029328 \, kN \downarrow \tag{5.15}$$

$$H_D = -H0_D + H1_D \cdot X_1 + H2_D \cdot X_2 = -225{,}2533476101 \, kN \quad \Rightarrow \quad |H_D| = 225{,}2533476101 \, kN \leftarrow$$

$$M_D = -X_2 = 420{,}2961343564 \, kNm \quad \Rightarrow \quad |M_D| = 420{,}2961343564 \, kNm \circlearrowleft$$

As equações de esforços internos para o Sistema Real são definidas conforme (5.16), a partir das reações calculadas em (5.15) e ilustradas com sentido correto na Figura 5.8.

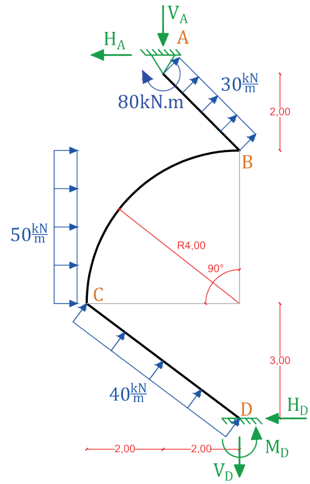


Figura 5.8 - Reações de apoio para o Sistema Real do Exercício 5.

$$M_{AB}(t) = -V_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - H_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + 30 \cdot t \cdot \frac{t}{2} + 80 \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \leq t \leq 2\sqrt{2}$$

$$M_{DC}(t) = -V_D \cdot \left(\frac{4t}{5}\right) + 40 \cdot t \cdot \frac{t}{2} - H_D \cdot \left(\frac{3t}{5}\right) + M_D \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \leq t \leq 5 \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned} M_{CB}(\alpha) = {} & M_{DC}(5) - (-V_D + 40 \cdot 4) \cdot 4 \cdot [1 - \cos(\alpha)] \\ & + (-H_D + 40 \cdot 3) \cdot 4 \cdot [sen(\alpha)] \\ & + \left(50 \cdot 4 \cdot sen(\alpha) \cdot \frac{4 \cdot sen(\alpha)}{2}\right) \end{aligned} \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

5.2 Sistema principal do sistema virtual para cálculo de δ_{H_B}(figura 5.9)

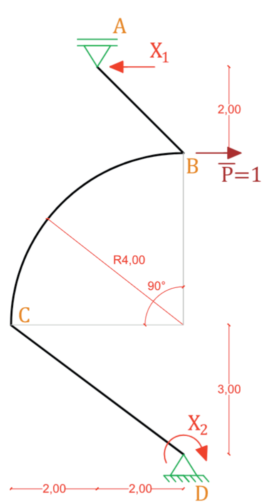


Figura 5.9 - Sistema principal do Sistema Virtual para cálculo de δ_{H_B} do Exercício 5

5.2.1 Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de $\boldsymbol{\delta_{HB}}$ (Figura 5.10)

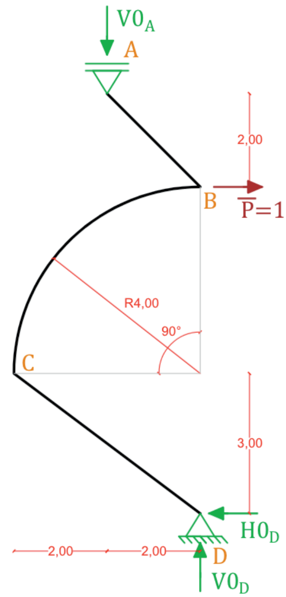


Figura 5.10 - Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de δ_{HB}.

<u>Cálculo das reações de apoio</u>

$$\boldsymbol{\Sigma F_H^{\rightarrow +} = 0} \tag{5.17}$$

$$1 - H0_D = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V^{\uparrow +} = 0} \tag{5.18}$$

$$V0_D - V0_A = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{Z_D}^{\circlearrowleft +} = 0} \tag{5.19}$$

$$V0_A \cdot 2 - 1 \cdot 7 = 0$$

As reações de apoio calculadas a partir das Equações (5.17) a (5.19) estão resumidas na Tabela 5.4.

Reações de Apoio		
$V0_A = 3{,}5\ \frac{kN}{kN}$	$H0_D = 1\ \frac{kN}{kN}$	$V0_D = 3{,}5\ \frac{kN}{kN}$

Tabela 5.4 - Resumo das Reações de Apoio no Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de δ_{HB}.

As equações de esforços internos para o pórtico da Figura 5.10 estão dispostas em (5.20).

$$M0_{AB}(t) = -V0_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \qquad \textbf{S}_1 \quad 0 \le t \le 2\sqrt{2}$$

$$M0_{DC}(t) = V0_D \cdot \left(\frac{4t}{5}\right) - 1 \cdot \left(\frac{3t}{5}\right) \qquad \textbf{S}_2 \quad 0 \le t \le 5 \tag{5.20}$$

$$M0_{CB}(\alpha) = M0_{DC}(5) - V0_D \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] - 1 \cdot 4 \cdot sen(\alpha) \qquad \textbf{S}_3 \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

5.2.2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual

Os coeficientes de flexibilidade calculados nos Sistemas [1] e [2] são iguais para o **Sistema Virtual** e **Sistema Real**, e as integrais estão expostas na íntegra em (5.13). Sendo assim, (5.21) expõe a determinação apenas dos termos de carga.

$$\boldsymbol{\delta_{10}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M0_{AB}(t) \cdot M1_{AB}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{5} \frac{M0_{DC}(t) \cdot M1_{DC}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CB}(\alpha) \cdot M1_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha = \boldsymbol{-2,1115410686 \cdot 10^{-2} \frac{m}{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{20}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M0_{AB}(t) \cdot M2_{AB}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{5} \frac{M0_{DC}(t) \cdot M2_{DC}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CB}(\alpha) \cdot M2_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha = \boldsymbol{1,3306400056 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{kN}} \tag{5.21}$$

Para a determinação dos hiperestáticos, a equação (5.22) mostra a compatibilização dos deslocamentos e rotações.

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{12} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = 0{,}6715241853 \frac{kN}{kN} \qquad X_2 = -\,1{,}0286416596 \frac{kN \cdot m}{kN} \tag{5.22}$$

Cálculo das reações de apoio do Estado de Carregamento ($\rightarrow^+, \uparrow^+, \circlearrowleft^+$)

$$V'_A = -V0_A + V1_A \cdot X_1 - V2_A \cdot X_2 = 0{,}0361796635 \frac{kN}{kN} \Rightarrow |V'_A| = 0{,}0361796635 \frac{kN}{kN} \uparrow$$

$$H'_A = -X_1 = -0{,}6715241853 \frac{kN}{kN} \Rightarrow |H'_A| = 0{,}6715241853 \frac{kN}{kN} \leftarrow$$

$$V'_D = V0_D - V1_D \cdot X_1 + V2_D \cdot X_2 = -0{,}0361796635 \frac{kN}{kN} \Rightarrow |V'_D| = 0{,}0361796635 \frac{kN}{kN} \downarrow \quad (5.23)$$

$$H'_D = -H0_D + H1_D \cdot X_1 + H2_D \cdot X_2 = -0{,}3284758147 \frac{kN}{kN} \Rightarrow |H'_D| = 0{,}3284758147 \frac{kN}{kN} \leftarrow$$

$$M'_D = -X_2 = 1{,}0286416596 \frac{kN \cdot m}{kN} \Rightarrow |M'_D| = 1{,}0286416596 \frac{kN \cdot m}{kN} \circlearrowleft$$

As equações de esforços internos do Sistema Virtual para o cálculo de δ_{HB} são definidas conforme (5.24), a partir das reações calculadas em (5.23) e ilustradas com sentido correto na Figura 5.11.

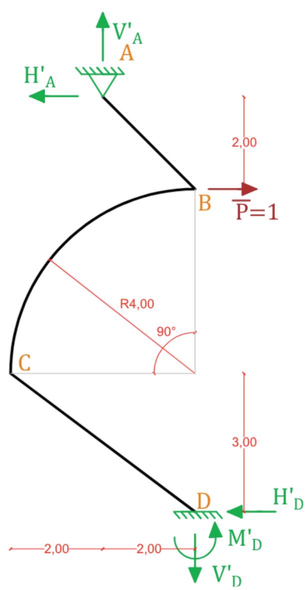


Figura 5.11 - Reações de apoio para o Sistema Virtual para cálculo de δ_{HB}

$$M'_{AB}(t) = V'_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - H'_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \le t \le 2\sqrt{2}$$

$$M'_{DC}(t) = -V'_D \cdot \left(\frac{4t}{5}\right) - H'_D \cdot \left(\frac{3t}{5}\right) + M'_D \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \le t \le 5 \qquad (5.24)$$

$$M'_{CB}(\alpha) = M'_{DC}(5) + V'_D \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] - H'_D \cdot 4 \cdot sen(\alpha) \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

5.3 Sistema principal do sistema virtual para cálculo de δ_{v_C} (figura 5.12)

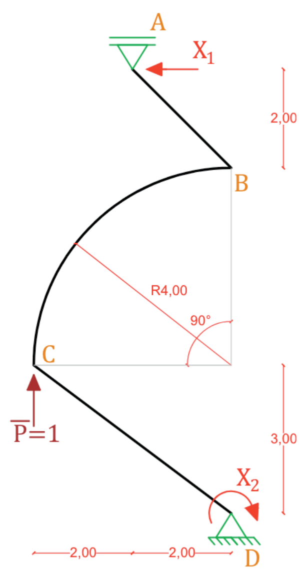


Figura 5.12 – Sistema Principal do Sistema Virtual para cálculo de δ_{v_C}.

5.3.1 Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de $\boldsymbol{\delta_{v_C}}$ (Figura 5.13)

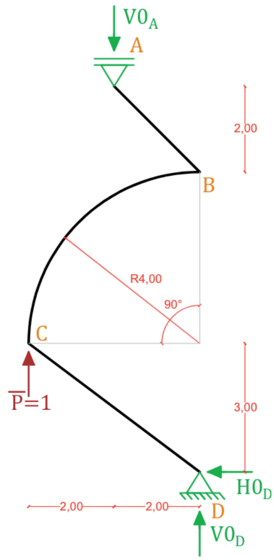


Figura 5.13 - Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de δ_{v_C}.

<u>Cálculo das reações de apoio</u>

$$\boldsymbol{\Sigma F_H^{\rightarrow +} = 0} \tag{5.25}$$

$$-H0_D = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V^{\uparrow +} = 0} \tag{5.26}$$

$$V0_D - V0_A + 1 = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_D}^{\circlearrowleft +} = 0} \tag{5.27}$$

$$V0_A \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$$

As reações de apoio calculadas a partir das Equações (5.25) a (5.27) estão resumidas na Tabela 5.5.

Reações de Apoio		
$V0_A = 2\,\frac{kN}{kN}$	$H0_D = 0$	$V0_D = 1\,\frac{kN}{kN}$

Tabela 5.5 - Resumo das Reações de Apoio no Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de δ_{v_C}.

As equações de esforços internos para o pórtico da Figura 5.13 estão dispostas em (5.28).

$$M0_{AB}(t) = -V0_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

S1 $0 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

$$M0_{DC}(t) = V0_D \cdot \left(\frac{4t}{5}\right) \tag{5.28}$$

S2 $0 \leq t \leq 5$

$$M0_{CB}(\alpha) = M0_{DC}(5) - (V0_D + 1) \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)]$$

S3 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

5.3.2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual

Os coeficientes de flexibilidade calculados nos Sistemas [1] e [2] são iguais para o **Sistema Virtual** e **Sistema Real**, e as integrais estão expostas na íntegra em (5.13). Sendo assim, (5.29) expõe a determinação apenas dos termos de carga.

$$\boldsymbol{\delta_{10}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M0_{AB}(t) \cdot M1_{AB}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^5 \frac{M0_{DC}(t) \cdot M1_{DC}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CB}(\alpha) \cdot M1_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha = \boldsymbol{-8,4433193427 \cdot 10^{-3} \frac{m}{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{20}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M0_{AB}(t) \cdot M2_{AB}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^5 \frac{M0_{DC}(t) \cdot M2_{DC}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CB}(\alpha) \cdot M2_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha = \boldsymbol{5,7821228706 \cdot 10^{-4} \frac{rad}{kN}} \tag{5.29}$$

Para a determinação dos hiperestáticos, a equação (5.30) mostra a compatibilização dos deslocamentos e rotações.

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{12} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = 0,2279360925 \frac{kN}{kN}$$
$$X_2 = -\,1,0909804145 \; \frac{kN \cdot m}{kN} \tag{5.30}$$

__**Cálculo das reações de apoio do Sistema Virtual**__ **(→⁺, ↑⁺, ↺⁺)**

$$
\begin{aligned}
V'_A &= -V0_A + V1_A \cdot X_1 - V2_A \cdot X_2 \\
&= -0{,}4287973763\,\frac{kN}{kN} && \Rightarrow \quad |V'_A| = 0{,}4287973763\,\frac{kN}{kN} \downarrow \\
H'_A &= -X_1 = -0{,}2279360925\,\frac{kN}{kN} && \Rightarrow \quad |H'_A| = 0{,}2279360925\,\frac{kN}{kN} \leftarrow \\
V'_D &= V0_D - V1_D \cdot X_1 + V2_D \cdot X_2 \\
&= -0{,}5712026237\,\frac{kN}{kN} && \Rightarrow \quad |V'_D| = 0{,}5712026237\,\frac{kN}{kN} \downarrow \\
H'_D &= -H0_D + H1_D \cdot X_1 + H2_D \cdot X_2 \\
&= 0{,}2279360925\,\frac{kN}{kN} && \Rightarrow \quad |H'_D| = 0{,}2279360925\,\frac{kN}{kN} \rightarrow \\
M'_D &= -X_2 = 1{,}0909804145\,\frac{kN \cdot m}{kN} && \Rightarrow \quad |M'_D| = 1{,}0909804145\,\frac{kN \cdot m}{kN} \circlearrowleft
\end{aligned}
\qquad (5.31)
$$

As equações de esforços internos do Sistema Virtual para o cálculo de δ_{V_C} são definidas conforme (5.32), a partir das reações calculadas em (5.31) e ilustradas com sentido correto na Figura 5.14.

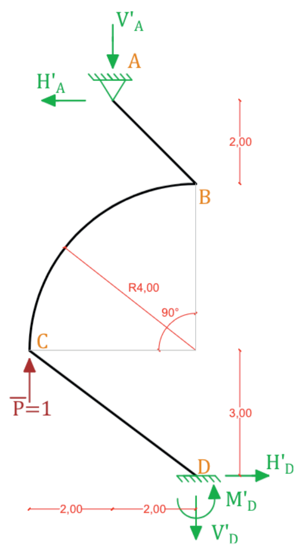


Figura 5.14 - Reações de apoio para o Sistema Virtual para cálculo de δ_{V_C}.

$$M'_{AB}(t) = -V'_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - H'_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \le t \le 2\sqrt{2}$$

$$M'_{DC}(t) = -V'_D \cdot \left(\frac{4t}{5}\right) + H'_D \cdot \left(\frac{3t}{5}\right) + M'_D \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \le t \le 5 \qquad (5.32)$$

$$M'_{CB}(\alpha) = M'_{DC}(5) - (-V'_D + 1) \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] + H'_D \cdot 4 \cdot sen(\alpha) \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

5.4 Sistema principal do sistema virtual para cálculo de θ_c (figura 5.15)

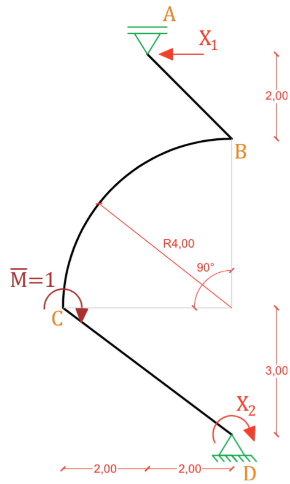


Figura 5.15 - Sistema Principal do Sistema Virtual para cálculo de θ_c.

5.4.1 Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de $\boldsymbol{\theta_c}$ (Figura 5.16)

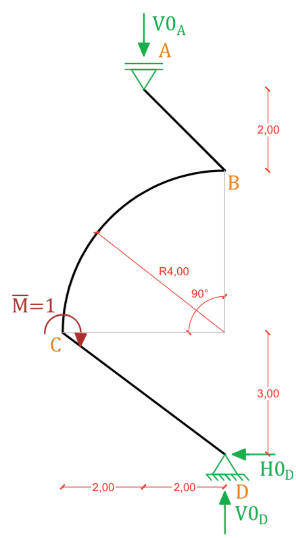


Figura 5.16 - Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de θ_c .

<u>Cálculo das reações de apoio</u>

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \boldsymbol{0} \tag{5.33}$$

$$-H0_D = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{5.34}$$
$$V0_D - V0_A = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_D}}^{\circlearrowleft +} = \mathbf{0} \tag{5.35}$$
$$V0_A \cdot 2 - 1 = 0$$

As reações de apoio calculadas a partir das Equações (5.33) a (5.35) estão resumidas na Tabela 5.6.

Reações de Apoio		
$V0_A = 0{,}5\ \dfrac{kN}{kN \cdot m}$	$H0_D = 0$	$V0_D = 0{,}5\ \dfrac{kN}{kN \cdot m}$

Tabela 5.6 - Resumo das Reações no Sistema [0] do Sistema Virtual para cálculo de θ_C.

As equações de esforços internos para o pórtico da Figura 5.16 estão dispostas em (5.36).

$$M0_{AB}(t) = -V0_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \leq t \leq 2\sqrt{2}$$

$$M0_{DC}(t) = V0_D \cdot \left(\frac{4t}{5}\right) \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \leq t \leq 5 \tag{5.36}$$

$$M0_{CB}(\alpha) = M0_{DC}(5) - 1 - V0_D \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

5.4.2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual

Os coeficientes de flexibilidade calculados nos Sistemas [1] e [2] são iguais para o **Sistema Virtual** e **Sistema Real**, e as integrais estão expostas na íntegra em (5.13). Sendo assim, (5.37) expõe apenas a determinação dos termos de carga.

$$\boldsymbol{\delta_{10}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M0_{AB}(t)\cdot M1_{AB}(t)}{E_c\cdot I}\cdot dt + \int_0^{5} \frac{M0_{DC}(t)\cdot M1_{DC}(t)}{E_c\cdot I}\cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CB}(\alpha)\cdot M1_{CB}(\alpha)}{E_c\cdot I}\cdot 4\cdot d\alpha = \mathbf{-2{,}8920798357\cdot 10^{-3}\,\frac{1}{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{20}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M0_{AB}(t)\cdot M2_{AB}(t)}{E_c\cdot I}\cdot dt + \int_0^{5} \frac{M0_{DC}(t)\cdot M2_{DC}(t)}{E_c\cdot I}\cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CB}(\alpha)\cdot M2_{CB}(\alpha)}{E_c\cdot I}\cdot 4\cdot d\alpha = \mathbf{1{,}7059473843\cdot 10^{-4}\,\frac{rad}{kN\cdot m}} \tag{5.37}$$

Para a determinação dos hiperestáticos, a equação (5.38) mostra a compatibilização dos termos de carga atualizados e os coeficientes de flexibilidade.

$$\begin{cases}\delta_{10}+\delta_{11}\cdot X_1+\delta_{12}\cdot X_2=0\\ \delta_{20}+\delta_{12}\cdot X_1+\delta_{22}\cdot X_2=0\end{cases}$$

$$X_1 = 0{,}1022294886\ \frac{kN}{kN\cdot m} \qquad X_2 = 0{,}0308387127\frac{kN\cdot m}{kN\cdot m} \tag{5.38}$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Virtual</u> (→⁺, ↑⁺, ↺⁺)

$$\begin{aligned}
V'_A &= -V0_A + V1_A\cdot X_1 - V2_A\cdot X_2 = -0{,}0553866579\frac{kN}{kN\cdot m} &&\Rightarrow |V'_A| = 0{,}0553866579\frac{kN}{kN\cdot m}\ \downarrow\\
H'_A &= -X_1 = -0{,}1022294886\ \frac{kN}{kN\cdot m} &&\Rightarrow |H'_A| = 0{,}1022294886\ \frac{kN}{kN\cdot m}\ \leftarrow\\
V'_D &= V0_D - V1_D\cdot X_1 + V2_D\cdot X_2 = 0{,}0553866579\frac{kN}{kN\cdot m} &&\Rightarrow |V'_D| = 0{,}0553866579\frac{kN}{kN\cdot m}\uparrow\\
H'_D &= -H0_D + H1_D\cdot X_1 + H2_D\cdot X_2 = 0{,}1022294886\frac{kN}{kN\cdot m} &&\Rightarrow |H'_D| = 0{,}1022294886\frac{kN}{kN\cdot m}\ \rightarrow\\
M'_D &= -X_2 = -0{,}0308387127\frac{kN\cdot m}{kN\cdot m} &&\Rightarrow |M'_D| = 0{,}0308387127\frac{kN\cdot m}{kN\cdot m}\ \circlearrowright
\end{aligned} \tag{5.39}$$

As equações de esforços internos do Sistema Virtual para o cálculo de θ_C são definidas conforme (5.40), a partir das reações calculadas em (5.39) e ilustradas com sentido correto na Figura 5.17.

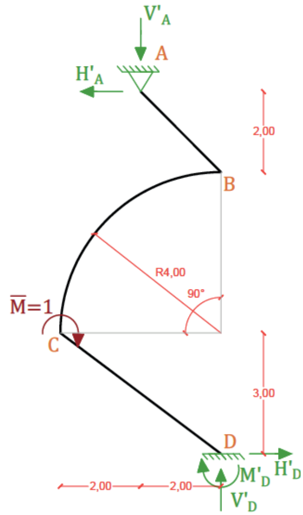


Figura 5.17 - Reações de apoio para o Sistema Virtual para cálculo de θ_C.

$$M'_{AB}(t) = -V'_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) - H'_A \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \le t \le 2\sqrt{2}$$

$$M'_{DC}(t) = V'_D \cdot \left(\frac{4t}{5}\right) + H'_D \cdot \left(\frac{3t}{5}\right) - M'_D \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \le t \le 5 \tag{5.40}$$

$$M'_{CB}(\alpha) = M'_{DC}(5) - 1 - V'_D \cdot 4 \cdot [1 - cos(\alpha)] + H'_D \cdot 4 \cdot sen(\alpha) \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

5.5 Cálculo de deslocamento e/ou rotação

Por fim, monta-se a integral para cálculo do deslocamento horizontal na seção correspondente ao nó B conforme (5.41), deslocamento vertical em C de acordo com (5.42), e rotação na seção correspondente ao nó C como apresentado em (5.43).

$$\boldsymbol{\delta_{H_B}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M_{AB}(t) \cdot M'_{AB}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{5} \frac{M_{DC}(t) \cdot M'_{DC}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{CB}(\alpha) \cdot M'_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha = \mathbf{0{,}07620\ m} \tag{5.41}$$

$$\boldsymbol{\delta_{V_C}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M_{AB}(t) \cdot M'_{AB}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{5} \frac{M_{DC}(t) \cdot M'_{DC}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{CB}(\alpha) \cdot M'_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha = \mathbf{0{,}05928\ m} \tag{5.42}$$

$$\boldsymbol{\theta_C} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{M_{AB}(t) \cdot M'_{AB}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{5} \frac{M_{DC}(t) \cdot M'_{DC}(t)}{E_c \cdot I} \cdot dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{CB}(\alpha) \cdot M'_{CB}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 4 \cdot d\alpha = \mathbf{0{,}01814}\ \boldsymbol{rad} \quad (5.43)$$

6 EXERCÍCIO 6 (HIPERESTÁTICO, BARRA INCLINADA, VARIAÇÃO DE ALTURA, ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA)

Calcular o deslocamento vertical da seção correspondente ao nó B (δ_{V_B}) da Figura 6.1 considerando os detalhes de altura da seção explícitos na Figura 6.2. Considerar somente os efeitos da flexão.

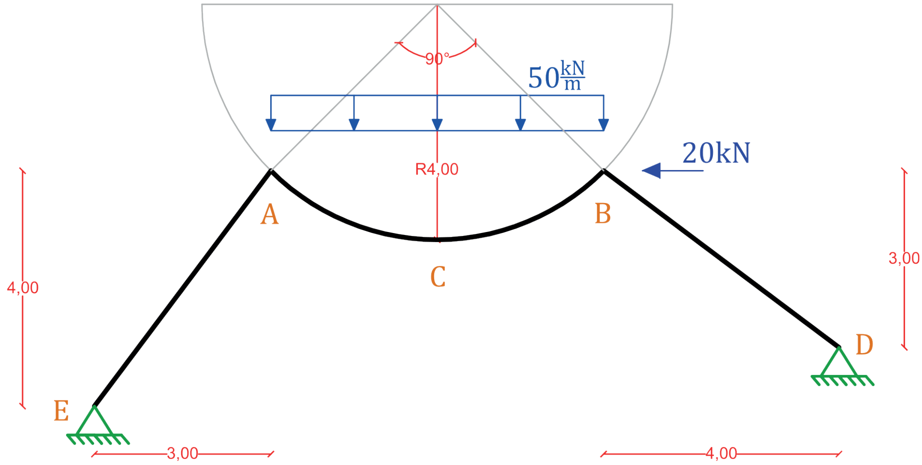


Figura 6.1 – Pórtico do Exercício 6 (todos os comprimentos em m, exceto quando indicado)

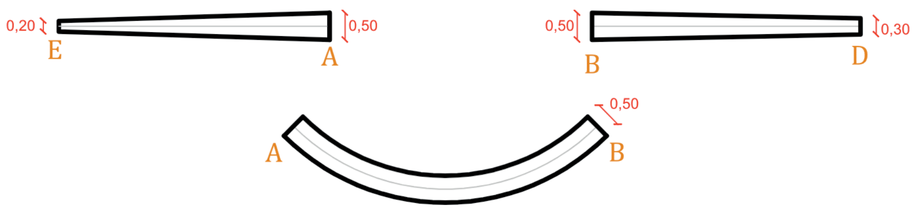


Figura 6.2 – Detalhes das alturas de seção transversal do Exercício 6.

Dados do problema:

$E_c = 30\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$b = 2\ dm$ (Base das seções transversais retangulares)

A estrutura em questão possui *1* grau de hiperestaticidade haja vista o número de reações de apoio (*4*) em comparação com as equações de equilíbrio da estática no plano (*3*).

6.1 Sistema principal do sistema real (figura 6.3)

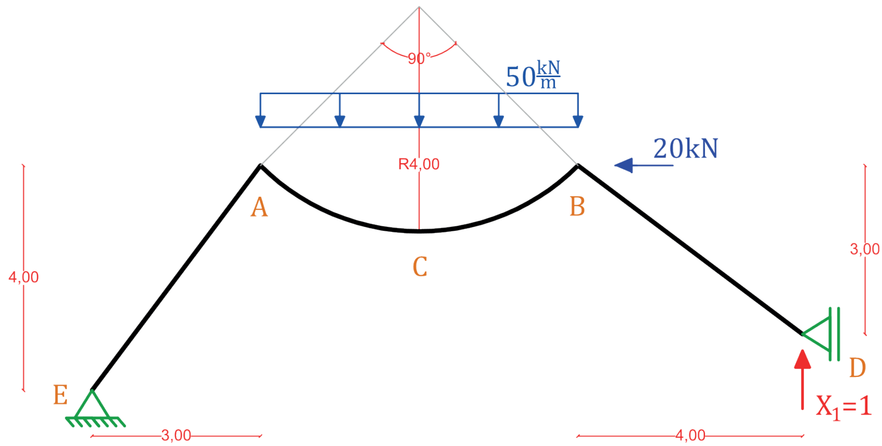


Figura 6.3 - Sistema Principal do Sistema Real do Exercício 6.

Segue-se para o Sistema [0] do Sistema Real, onde a nova estrutura isostática encontrada a partir da eliminação do apoio vertical em D será solicitada pelo carregamento original, conforme a metodologia do Método das Forças.

6.1.1 Sistema [0] do Sistema Real (Figura 6.4)

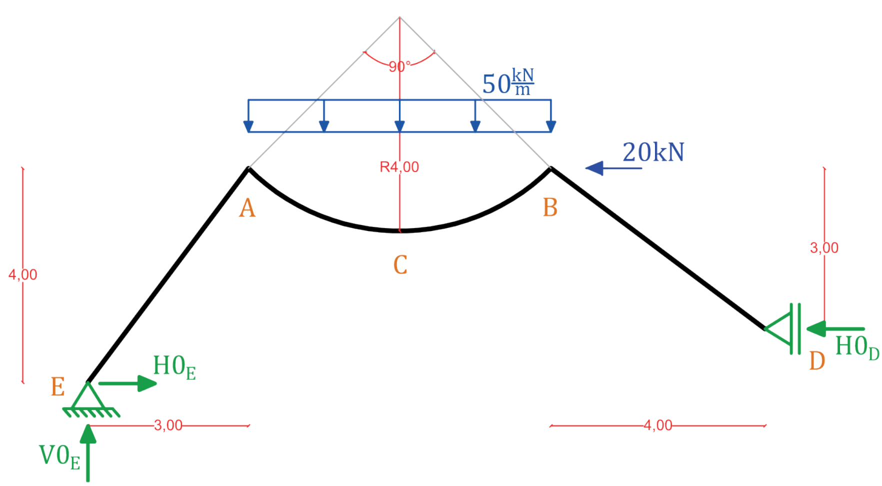


Figura 6.4 - Sistema [0] do Sistema Real

<u>Cálculo das reações de apoio</u>

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \mathbf{0}$$

$$H0_E - 20 - H0_D = 0 \tag{6.1}$$

Para o cálculo do somatório das forças verticais, a projeção horizontal da carga distribuída é calculada conforme demonstrado na Figura 6.5.

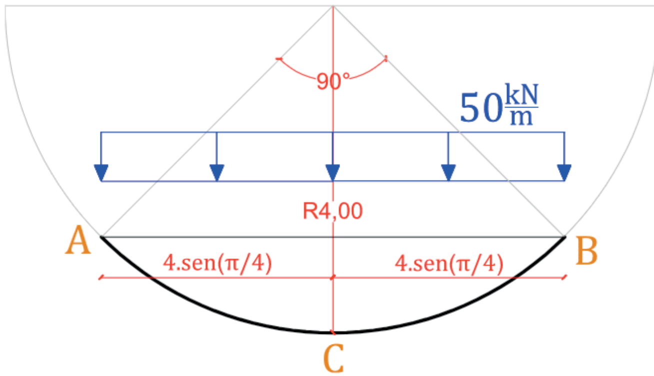


Figura 6.5 – Projeção horizontal da carga distribuída no arco ACB.

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{6.2}$$

$$-50 \cdot [4 \cdot sen(^{\pi}/_{4}) + 4 \cdot sen(^{\pi}/_{4})] + V0_E = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_E}}^{\circlearrowleft +} = \mathbf{0} \tag{6.3}$$

$$H0_D \cdot 1 - 50 \cdot \{2 \cdot 4 \cdot sen(^{\pi}/_{4}) \cdot [3 + 4 \cdot sen(^{\pi}/_{4})]\} + 20 \cdot 4 = 0$$

Reações de Apoio		
$V0_E = 282{,}843\ kN$	$H0_E = 1588{,}528\ kN$	$H0_D = 1568{,}528\ kN$

Tabela 6.1 – Resumo das Reações de Apoio no Sistema [0] do Sistema Real.

As equações de esforços internos para o pórtico da Figura 6.4 estão apresentadas em (6.4). Para efeito didático, optou-se por dividir o arco em dois trechos (AC e BC) de 45º graus. A Figura 6.6 exibe as escolhas das seções para determinação das equações de momento fletor. Em relação à escolha do eixo para as barras inclinadas, utilizou-se a mesma lógica estabelecida na Figura 1.2 e Figura 1.3.

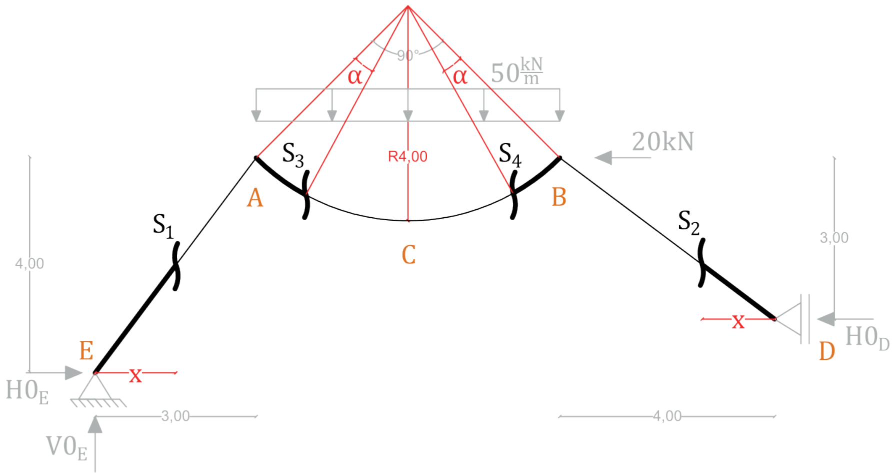


Figura 6.6 – Determinação das seções para as equações de Momento Fletor.

A Figura 6.7 detalha as distâncias para cálculo de momentos fletores da seção S_3. Raciocínio análogo deve ser aplicado para a seção S_4.

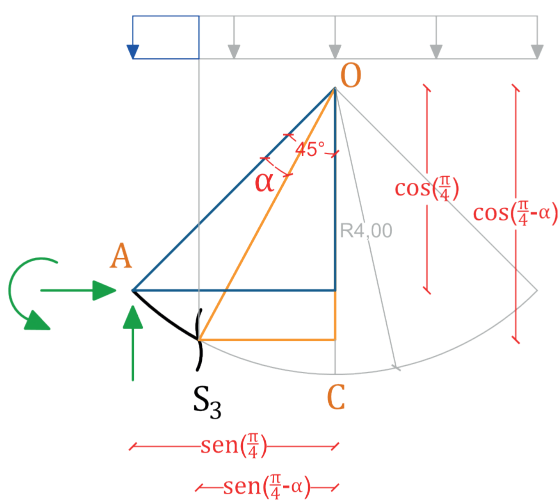


Figura 6.7 - Distâncias para cálculo de momentos fletores.

$$M0_{EA}(x,y) = V0_E \cdot x - H0_E \cdot y$$

$$M0_{EA}(x) = V0_E \cdot x - H0_E \cdot \frac{4}{3}x$$

S1 $0 \leq x \leq 3$

$$M0_{DB}(y) = -H0_D \cdot y$$

$$M0_{DB}(x) = -H0_D \cdot \frac{3}{4}x$$

S2 $0 \leq x \leq 4$

$$M0_{AC}(\alpha) = M0_{EA}(3) + H0_E \cdot 4 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - 50 \cdot \frac{\left\{4 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]\right\}^2}{2} + V0_E \cdot 4 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] \qquad (6.4)$$

S3 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$

$$M0_{BC}(\alpha) = M0_{DB}(4) + (20 + H0_D) \cdot 4 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - 50 \cdot \frac{\left\{4 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]\right\}^2}{2}$$

S4 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$

6.1.2 Sistema [1] do Sistema Real (Figura 6.8)

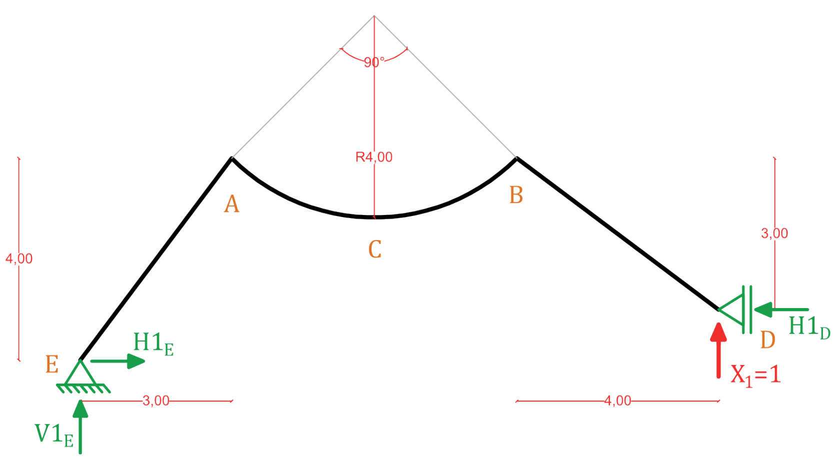


Figura 6.8 - Sistema [1] do Sistema Real

Cálculo das reações de apoio:

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \mathbf{0} \tag{6.5}$$

$$H1_E - H1_D = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{6.6}$$

$$V1_E + 1 = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_E}}^{\circlearrowleft +} = \mathbf{0} \tag{6.7}$$

$$H1_D \cdot 1 + 1 \cdot \{4 + 2 \cdot 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3\} = 0$$

Reações de Apoio		
$V1_E = -1\ \frac{kN}{kN}$	$H1_E = -12{,}657\ \frac{kN}{kN}$	$H1_D = -12{,}657\ \frac{kN}{kN}$

Tabela 6.2 – Resumo das Reações de Apoio no Sistema [1] do Sistema Real

As equações de esforços internos para o pórtico da Figura 6.8 ficam conforme expresso em (6.8).

$$M1_{EA}(x) = V1_E \cdot x - H1_E \cdot \frac{4}{3}x \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \le x \le 3$$

$$M1_{DB}(x) = -H1_D \cdot \frac{3}{4}x + 1 \cdot x \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \le x \le 4$$

$$M1_{AC}(\alpha) = M1_{EA}(3) + H1_E \cdot 4 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + V1_E \cdot 4 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4} \tag{6.8}$$

$$M1_{BC}(\alpha) = M1_{DB}(4) + H1_D \cdot 4 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + 1 \cdot 4 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] \qquad \mathbf{S_4} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4}$$

<u>Consideração das variações de altura da seção transversal nos momentos de inércia:</u>

Barra EA



Figura 6.9 – Seção longitudinal da Barra EA.

Considerando a variação linear de altura da seção transversal, o cálculo será feito a partir de uma função polinomial do primeiro grau, conforme (6.9):

$$h_{EA}(x) = k_{1_{EA}} \cdot x + k_{2_{EA}} \tag{6.9}$$

Onde,

$$\begin{cases} h_{EA}(0) = 0{,}2 \\ h_{EA}(3) = 0{,}5 \end{cases}$$
$$h_{EA}(x) = 0{,}1 \cdot x + 0{,}2 \tag{6.10}$$

Atentar para a necessidade de utilização do mesmo eixo x escolhido para as equações de esforços internos (ver (6.4) e (6.8)), uma vez que as expressões vão para a mesma integral, justificando assim a escolha do valor de $3\ m$ para limite da função em (6.10) ao invés do comprimento da barra inclinada EA, que vale $5\ m$. A inércia é então calculada conforme (6.11).

$$I_{EA}(x) = \frac{b \cdot [h_{EA}(x)]^3}{12} \tag{6.11}$$

Barra AB

Para a barra AB (Figura 6.10) o cálculo é direto, utilizando a expressão do momento de inércia para seções retangulares, disposta em (6.12).

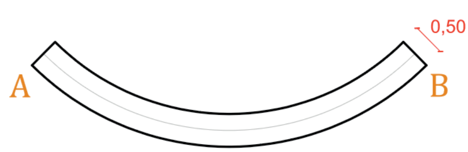


Figura 6.10 – Seção longitudinal da Barra AB.

$$I_{AB} = b \cdot \frac{(0{,}5)^3}{12} \tag{6.12}$$

Barra DB

A barra DB (Figura 6.11) segue o mesmo raciocínio do elemento EA da Figura 6.9, incluindo a observação em relação ao eixo em questão escolhido (Equações (6.13) e (6.14)).

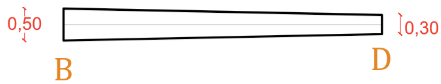


Figura 6.11 – Seção longitudinal da Barra DB.

$$h_{DB}(x) = k_{1_{DB}} \cdot x + k_{2_{DB}} \tag{6.13}$$

Onde,

$$\begin{cases} h_{DB}(0) = 0{,}3 \\ h_{DB}(4) = 0{,}5 \end{cases}$$
$$h_{DB}(x) = 0{,}05 \cdot x + 0{,}3 \tag{6.14}$$

A expressão do momento de inércia está ilustrada em (6.15).

$$I_{DB}(x) = \frac{b \cdot [h_{DB}(x)]^3}{12} \tag{6.15}$$

6.1.3 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Real

As integrais para obtenção dos coeficientes de flexibilidade e termos de carga a fim de calcular as reações de apoio do pórtico hiperestático da Figura 6.1 estão apresentadas em (6.16). É necessário fazer a conversão do eixo das integrais para as barras EA e DB, multiplicando-as respectivamente por $^5/_3$ e $^5/_4$. Os referidos elementos possuem eixos inclinados, enquanto que as equações de esforços e inércias foram escritas segundo direções horizontais. Ainda, convertese o eixo *ds* genérico da integral para coordenadas polares no arco AB, conforme Figura 1.3.

$$\boldsymbol{\delta_{10}} = \int_0^3 \frac{M0_{EA}(x) \cdot M1_{EA}(x)}{E_c \cdot I_{EA}(x)} \cdot \frac{5}{3} \cdot dx + \int_0^4 \frac{M0_{DB}(x) \cdot M1_{DB}(x)}{E_c \cdot I_{DB}(x)} \cdot \frac{5}{4} \cdot dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M0_{AC}(\alpha) \cdot M1_{AC}(\alpha)}{E_c \cdot I_{AB}} \cdot 4 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M0_{BC}(\alpha) \cdot M1_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_{AB}} \cdot 4 \cdot d\alpha = \boldsymbol{-34{,}3685733648\ m} \tag{6.16}$$
$$\boldsymbol{\delta_{11}} = \int_0^3 \frac{[M1_{EA}(x)]^2}{E_c \cdot I_{EA}(x)} \cdot \frac{5}{3} \cdot dx + \int_0^4 \frac{[M1_{DB}(x)]^2}{E_c \cdot I_{DB}(x)} \cdot \frac{5}{4} \cdot dx$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{[M1_{AC}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_{AB}} \cdot 4 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{[M1_{BC}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I_{AB}} \cdot 4 \cdot d\alpha$$
$$= \mathbf{3,0793708061 \cdot 10^{-1} \frac{m}{kN}}$$

Aplicando a compatibilização dos deslocamentos e rotações, tem-se, conforme (6.17).

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \qquad (6.17)$$
$$X_1 = 111,6090770768\ kN$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Real</u> (→⁺, ↑⁺, ↺⁺)

$$\begin{aligned} V_E &= V0_E + V1_E \cdot X_1 = 171,2336353978\ kN & \Rightarrow |V_E| = 171,2336353978\ kN \uparrow \\ H_E &= H0_E + H1_E \cdot X_1 = 175,9083159423\ kN & \Rightarrow |H_E| = 175,9083159423\ kN \rightarrow \\ V_D &= X_1 = 111,6090770768\ kN & \Rightarrow |V_D| = 111,6090770768\ kN \uparrow \\ H_D &= -H0_D - H1_D \cdot X_1 = -155,9083159423\ kN & \Rightarrow |H_D| = 155,9083159423\ kN \leftarrow \end{aligned} \qquad (6.18)$$

De posse das reações de apoio apresentadas em (6.18) é possível calcular as equações de esforços internos do pórtico da Figura 6.12, demonstradas em (6.19).

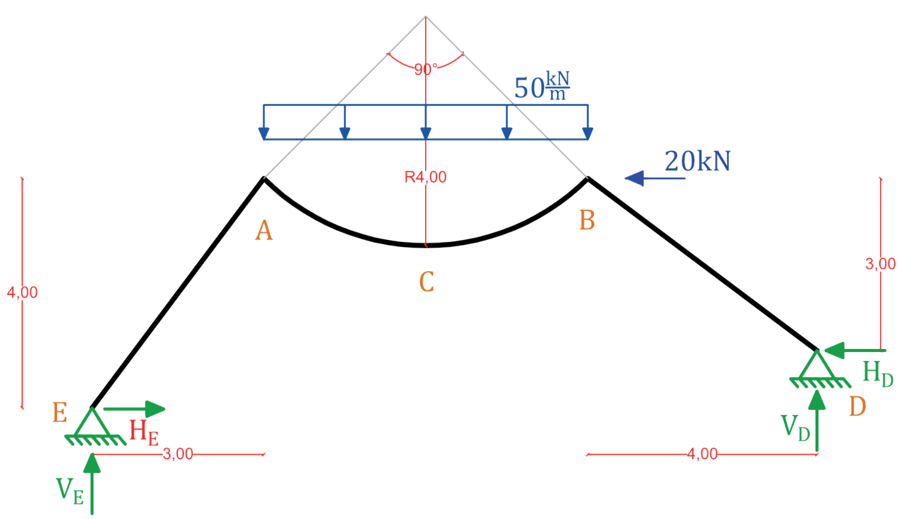


Figura 6.12 –Reações de apoio do Sistema Real.

$$M_{EA}(x) = V_E \cdot x - H_E \cdot \frac{4}{3}x \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_1} \\ 0 \leq x \leq 3 \end{matrix}$$

$$M_{DB}(x) = V_D \cdot x - H_D \cdot \frac{3}{4}x \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_2} \\ 0 \leq x \leq 4 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} M_{AC}(\alpha) = {} & M_{EA}(3) + H_E \cdot 4 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - 50 \\ & \cdot \frac{\left\{4 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]\right\}^2}{2} + V_E \cdot 4 \\ & \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] \end{aligned} \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_3} \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \end{matrix} \qquad (6.19)$$

$$\begin{aligned} M_{BC}(\alpha) = {} & M_{DB}(4) + (20 + H_D) \cdot 4 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ & - 50 \cdot \frac{\left\{4 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]\right\}^2}{2} + V_D \cdot 4 \\ & \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] \end{aligned} \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_4} \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} \end{matrix}$$

6.2 Sistema principal do sistema virtual (figura 6.13)

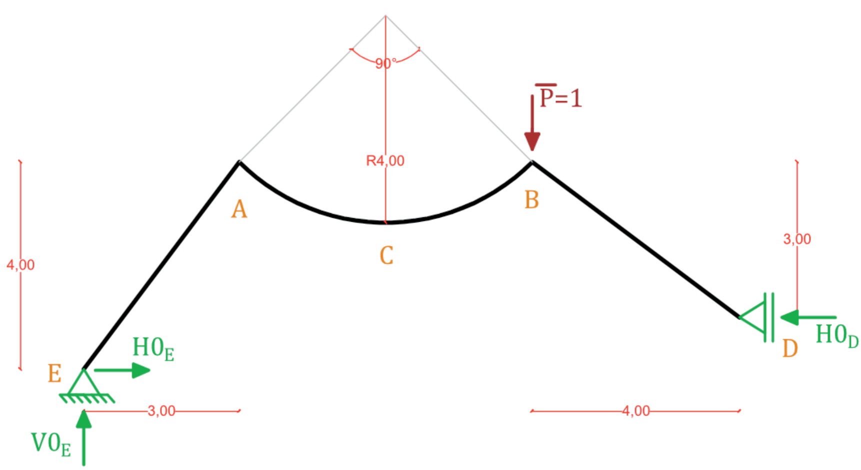


Figura 6.13 - Sistema principal do Sistema Virtual do Exercício 6.

6.2.1 Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 6.14)

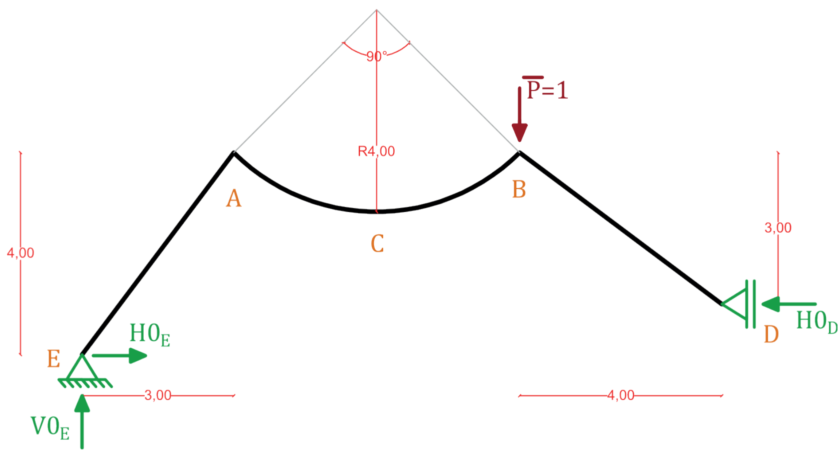


Figura 6.14 - Sistema [0] do Sistema Virtual

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \mathbf{0} \tag{6.20}$$

$$H0_E - H0_D = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{6.21}$$

$$V0_E - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_E}}^{\circlearrowleft +} = \mathbf{0} \tag{6.22}$$

$$H0_D \cdot 1 - 1 \cdot \{[2 \cdot 4 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)] + 3\} = 0$$

Reações de Apoio		
$V0_E = 1\ \frac{kN}{kN}$	$H0_E = 8{,}657\ \frac{kN}{kN}$	$H0_D = 8{,}657\ \frac{kN}{kN}$

Tabela 6.3 – Resumo das Reações de Apoio no Sistema [0] do Sistema Virtual

Os esforços internos estão apresentados em (6.23).

$$M0_{EA}(x) = V0_E \cdot x - H0_E \cdot \frac{4}{3}x$$

S1
$0 \leq x \leq 3$

$$M0_{DB}(x) = -H0_D \cdot \frac{3}{4}x$$

S2
$0 \leq x \leq 4$

$$M0_{AC}(\alpha) = M0_{EA}(3) + H0_E \cdot 4 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + V0_E \cdot 4 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_3} \\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4} \end{matrix} \tag{6.23}$$

$$M0_{BC}(\alpha) = M0_{DB}(4) + H0_D \cdot 4 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - 1 \cdot 4 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_4} \\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4} \end{matrix}$$

Para o problema em questão, o Sistema [1] do Sistema Virtual é igual ao Sistema [1] do Sistema Real, e suas expressões e cálculos foram apresentados no tópico 6.1.2. Dessa forma, é possível partir diretamente para o cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade do Sistema Virtual.

6.2.2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual

Objetivando calcular X_1 da Figura 6.13 e consequentemente as reações de apoio do pórtico hiperestático do Sistema Virtual, as integrais estão dispostas em (6.16), e os resultados atualizados resumidos na equação (6.24).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta_{10}} &= \mathbf{-1,975225517 \cdot 10^{-1}} \, \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN}} \\ \boldsymbol{\delta_{11}} &= \mathbf{3,0793708061 \cdot 10^{-1}} \, \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN}} \end{aligned} \tag{6.24}$$

A compatibilização dos deslocamentos e rotações está apresentada em (6.25).

$$\begin{aligned} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 &= 0 \\ X_1 &= 0,6414380214 \frac{kN}{kN} \end{aligned} \tag{6.25}$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Virtual</u> (→⁺, ↑⁺, ↺⁺)

$$\begin{aligned} V'_E &= V0_E + V1_E \cdot X_1 = 0,3585619786 \frac{kN}{kN} && \Rightarrow |V'_E| = 0,3585619786 \frac{kN}{kN} \uparrow \\ H'_E &= H0_E + H1_E \cdot X_1 = 0,5382667026 \frac{kN}{kN} && \Rightarrow |H'_E| = 0,5382667026 \frac{kN}{kN} \rightarrow \\ V'_D &= X_1 = 0,6414380214 \frac{kN}{kN} && \Rightarrow |V'_D| = 0,6414380214 \frac{kN}{kN} \uparrow \\ H'_D &= -H0_D - H1_D \cdot X_1 = -0,5382667026 \frac{kN}{kN} && \Rightarrow |H'_D| = 0,5382667026 \frac{kN}{kN} \leftarrow \end{aligned} \tag{6.26}$$

As equações de esforços internos para o Sistema Virtual (Figura 6.15), estão demonstradas em (6.27)

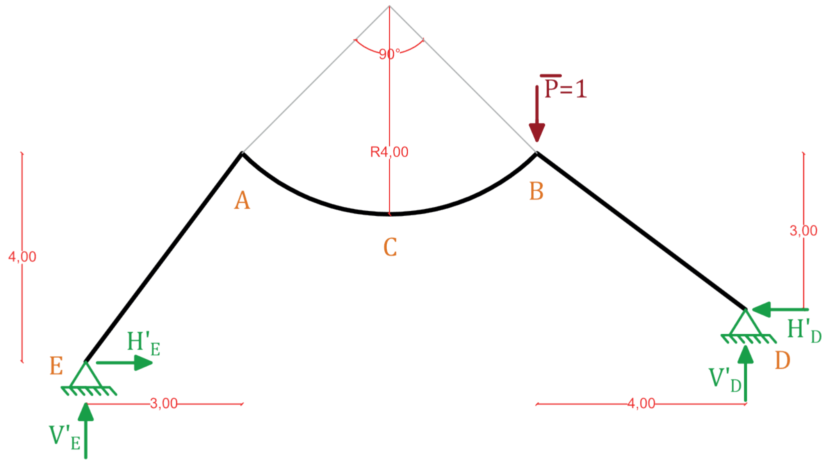


Figura 6.15 – Disposição das reações de apoio do Sistema Virtual.

$$M'_{EA}(x) = V'_E \cdot x - H'_E \cdot \frac{4}{3}x \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_1} \\ 0 \le x \le 3 \end{matrix}$$

$$M'_{DB}(x) = V'_D \cdot x - H'_D \cdot \frac{3}{4}x \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_2} \\ 0 \le x \le 4 \end{matrix}$$

$$M'_{AC}(\alpha) = M'_{EA}(3) + H'_E \cdot 4 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + V'_E \cdot 4 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_3} \\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4} \end{matrix} \qquad (6.27)$$

$$M'_{BC}(\alpha) = M'_{DB}(4) + H'_D \cdot 4 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] + (V'_D - 1) \cdot 4 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right] \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_4} \\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{4} \end{matrix}$$

6.3 Cálculo de deslocamento e/ou rotação

Por fim, monta-se a integral para cálculo do deslocamento vertical na seção correspondente ao nó B conforme (6.28), utilizando as equações apresentadas em (6.19) e (6.27):

$$\boldsymbol{\delta_{V_B}} = \int_0^3 \frac{M_{EA}(x) \cdot M'_{EA}(x)}{E_c \cdot I_{EA}(x)} \cdot \frac{5}{3} \cdot dx + \int_0^4 \frac{M_{DB}(x) \cdot M'_{DB}(x)}{E_c \cdot I_{DB}(x)} \cdot \frac{5}{4} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M_{AC}(\alpha) \cdot M'_{AC}(\alpha)}{E_c \cdot I_{AB}} \cdot 4 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M_{BC}(\alpha) \cdot M'_{BC}(\alpha)}{E_c \cdot I_{AB}} \cdot 4 \cdot d\alpha = \mathbf{0{,}02061\ m} \qquad (6.28)$$

7 EXERCÍCIO 7 (HIPERESTÁTICO, BARRA INCLINADA, ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA, QUADRO FECHADO)

Calcular o deslocamento vertical na seção transversal correspondente ao nó A (δ_{VA}) do pórtico da Figura 7.1.

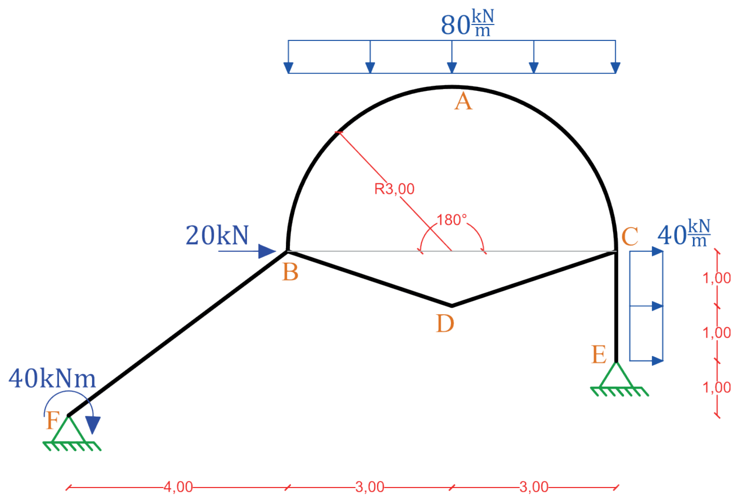


Figura 7.1 – Pórtico do Exercício 7 (todos os comprimentos em m, exceto quando indicado)

<u>Dados do problema:</u>

$E_c = 20\ GPa$ (Módulo de elasticidade longitudinal)

$b = 20\ cm$ (Base das seções transversais retangulares)

$h = 40\ cm$ (Altura das seções transversais retangulares)

A estrutura da Figura 7.1 possui *4* reações referentes aos dois apoios do segundo gênero nos nós F e E. Possui ainda um *quadro fechado* formado pelos nós $ACDB$, que acrescenta *3* incógnitas ao problema em função das barras em questão transmitirem os esforços normal, cortante e momento fletor. O equilíbrio da estática no plano acrescenta *3* equações, totalizando um grau de hiperestaticidade igual a ***4***. A equação (7.1) detalha essa determinação.

$$\begin{aligned} g = [\ (n^o de\ reações\ de\ apoio) + 3 \cdot (n^o de\ quadros\ fechados)\ ] \\ - [\ (3\ equações\ da\ estática\ no\ plano) \\ + (n^o\ de\ equações\ advindas\ de\ articulações)\ ] \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$g = [\ 4 + 3 \cdot 1\ ] - [\ 3 + 0\ ] = 4$$

Estrutura Hiperestática

7.1 Sistema principal do sistema real

O sistema principal é uma estrutura isostática auxiliar para cálculo dos hiperestáticos. A Figura 7.2 demonstra o trecho escolhido para a necessária secção do *quadro fechado*.

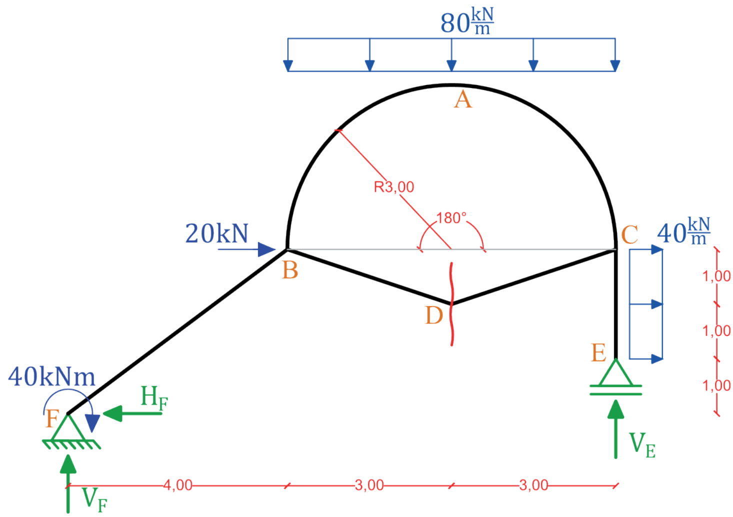


Figura 7.2 – Posição da secção no Sistema Principal do Sistema Real do Exercício 7.

A Figura 7.3 mostra então o Sistema Principal escolhido para a resolução do problema.

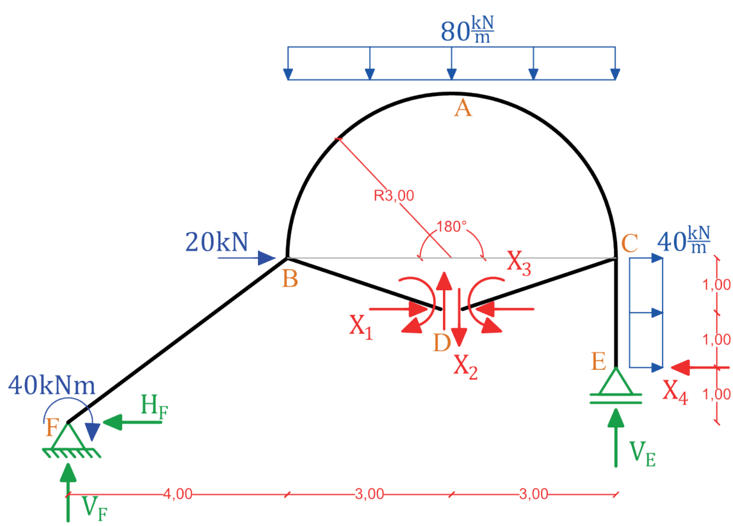


Figura 7.3 - Sistema Principal do Sistema Real do Exercício 7.

7.1.1 Sistema [0] do Sistema Real (Figura 7.4)

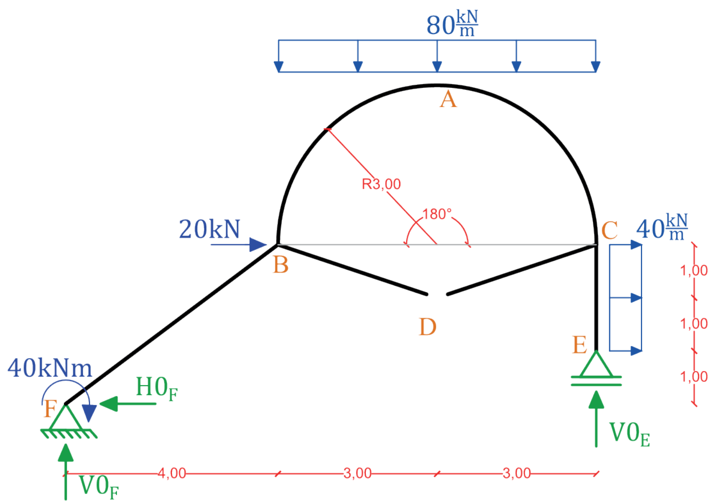


Figura 7.4 - Sistema [0] do Sistema Real.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \mathbf{0} \tag{7.2}$$

$$40 \cdot 2 + 20 - H0_F = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{7.3}$$

$$-80 \cdot 6 + V0_F + V0_E = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_F}}^{\circlearrowleft +} = \mathbf{0} \tag{7.4}$$

$$V0_E \cdot 10 - 20 \cdot 3 - 80 \cdot 6 \cdot 7 - 40 \cdot 2 \cdot 2 - 40 = 0$$

Reações de Apoio		
$V0_F = 118\ kN$	$H0_F = 100\ kN$	$V0_E = 362\ kN$

Tabela 7.1 – Resumo das Reações de Apoio do Sistema [0] do Sistema Real.

As seções transversais para os Esforços Internos estão destacadas na Figura 7.5.

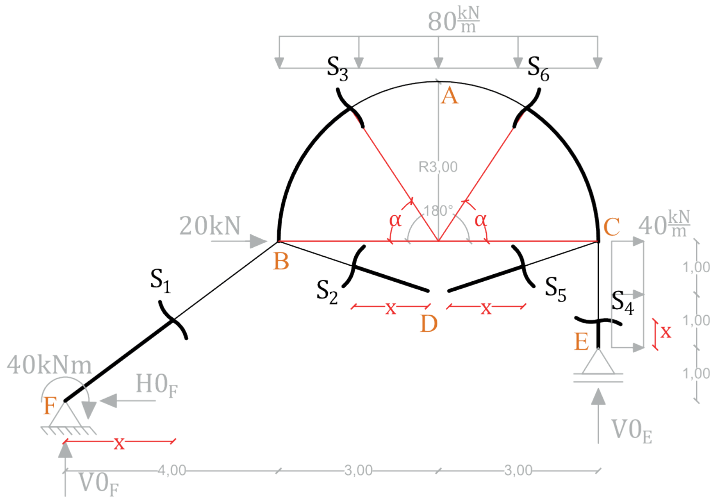


Figura 7.5 - Determinação das seções para as equações de Momento Fletor.

$$M0_{FB}(x,y) = V0_F \cdot x + 40 + H0_F \cdot y$$

Escrevendo y em função de x, conforme a Figura 7.6:

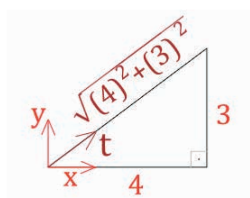


Figura 7.6 – Eixos para a barra FB.

$$\frac{t}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = \frac{x}{4} = \frac{y}{3}$$

S1

$0 \leq x \leq 4$

$$M0_{FB}(x) = V0_F \cdot x + 40 + H0_F \cdot \left(\frac{3 \cdot x}{4}\right) \tag{7.5}$$

$$M0_{DB}(x) = 0$$

S2

$0 \leq x \leq 3$

$M0_{BA}$ e $M0_{CA}$ são calculados com base nas projeções demonstradas na Figura 7.7.

S3

$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$$M0_{BA}(\alpha) = M0_{FB}(4) + (-20 + H0_F) \cdot [3 \cdot sen(\alpha)] + V0_F \cdot [(3 - 3 \cdot cos(\alpha)] - 80 \cdot \frac{[(3 - 3 \cdot cos(\alpha)]^2}{2}$$

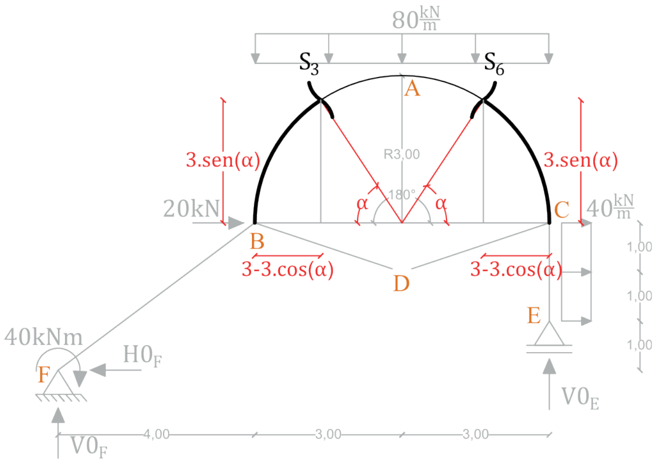


Figura 7.7 – Detalhe das projeções para as Equações $M0_{BA}$ e $M0_{CA}$.

$$M0_{EC}(x) = 40 \cdot \frac{x^2}{2}$$

S₄
$0 \le x \le 2$

$$M0_{DC}(x) = 0$$

S₅
$0 \le x \le 3$

$$M0_{CA}(\alpha) = M0_{EC}(2) + (40 \cdot 2) \cdot [3 \cdot sen(\alpha)] + V0_E \cdot [(3 - 3 \cdot cos(\alpha)] - 80 \cdot \frac{[(3 - 3 \cdot cos(\alpha)]^2}{2}$$

S₆
$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

7.1.2 Sistema [1] do Sistema Real (Figura 7.8)

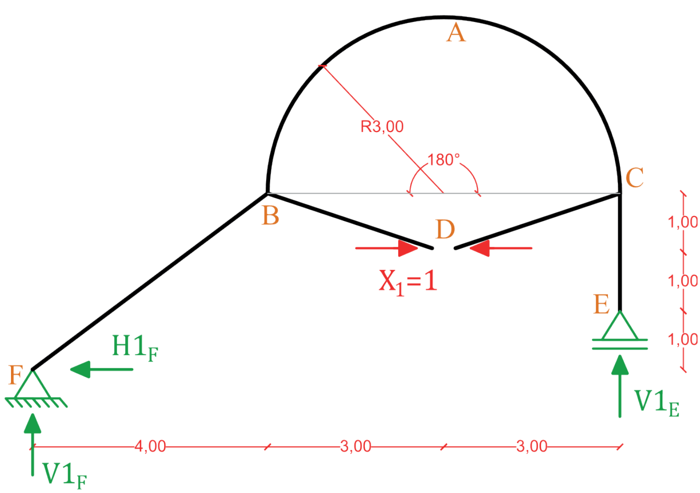


Figura 7.8 - Sistema [1] do Sistema Real.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \mathbf{0} \tag{7.6}$$
$$-H1_F - 1 + 1 = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{7.7}$$
$$V1_F + V1_E = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_F}}^{\circlearrowleft +} = \mathbf{0} \tag{7.8}$$
$$V1_E \cdot 10 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$$

Reações de Apoio		
$V1_F = 0$	$H1_F = 0$	$V1_E = 0$

Tabela 7.2 – Resumo das Reações de Apoio do Sistema [1] do Sistema Real.

$$M1_{FB}(x) = 0$$

S1
$0 \leq x \leq 4$

$$M1_{DB}(y) = 1 \cdot y$$

Escrevendo y em função de x, conforme a Figura 7.9.

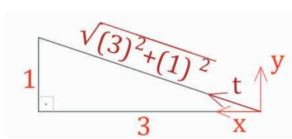


Figura 7.9 – Eixos para a barra DB.

S2
$0 \leq x \leq 3$ (7.9)

$$\frac{t}{\sqrt{(3)^2 + (1)^2}} = \frac{x}{3} = \frac{y}{1}$$

$$M1_{DB}(x) = \frac{x}{3}$$

$$M1_{BA}(\alpha) = -M1_{DB}(3) - 1 \cdot [3 \cdot sen(\alpha)]$$

S3
$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$$M1_{EC}(x) = 0$$

S4
$0 \leq x \leq 2$

$$M1_{DC}(y) = 1 \cdot y$$

Aplicando o mesmo raciocínio da Figura 7.9 para $M1_{DC}$.

S5
$0 \leq x \leq 3$

$$M1_{DC}(x) = \frac{x}{3}$$

S6
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$$M1_{CA}(\alpha) = -M1_{DC}(3) - 1 \cdot [3 \cdot sen(\alpha)]$$

7.1.3 Sistema [2] do Sistema Real (Figura 7.10)

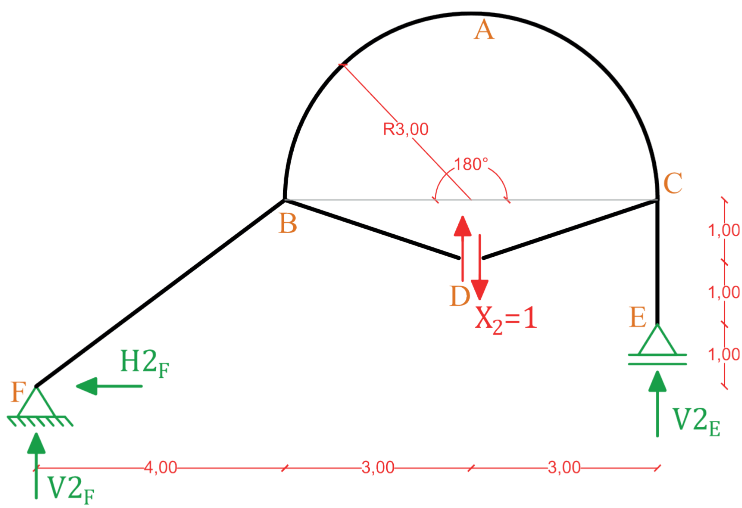


Figura 7.10 - Sistema [2] do Sistema Real.

Cálculo das reações de apoio

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\to +} = \boldsymbol{0} \tag{7.10}$$

$$-H2_F = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \boldsymbol{0} \tag{7.11}$$

$$V2_F + V2_E + 1 - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_F}}^{\circlearrowleft +} = \boldsymbol{0} \tag{7.12}$$

$$V2_E \cdot 10 + 1 \cdot 7 - 1 \cdot 7 = 0$$

Reações de Apoio		
$V2_F = 0$	$H2_F = 0$	$V2_E = 0$

Tabela 7.3 – Resumo das Reações de Apoio do Sistema [2] do Sistema Real.

$$
\begin{aligned}
&M2_{FB}(x) = 0 && \mathbf{S_1}\quad 0 \le x \le 4 \\
&M2_{DB}(x) = x && \mathbf{S_2}\quad 0 \le x \le 3 \\
&M2_{BA}(\alpha) = -M2_{DB}(3) + 1 \cdot [3 - 3 \cdot cos(\alpha)] && \mathbf{S_3}\quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
&M2_{EC}(x) = 0 && \mathbf{S_4}\quad 0 \le x \le 2 \\
&M2_{DC}(x) = -x && \mathbf{S_5}\quad 0 \le x \le 3 \\
&M2_{CA}(\alpha) = -M2_{DC}(3) - 1 \cdot [3 - 3 \cdot cos(\alpha)] && \mathbf{S_6}\quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
\qquad (7.13)
$$

7.1.4 Sistema [3] do Sistema Real (Figura 7.11)

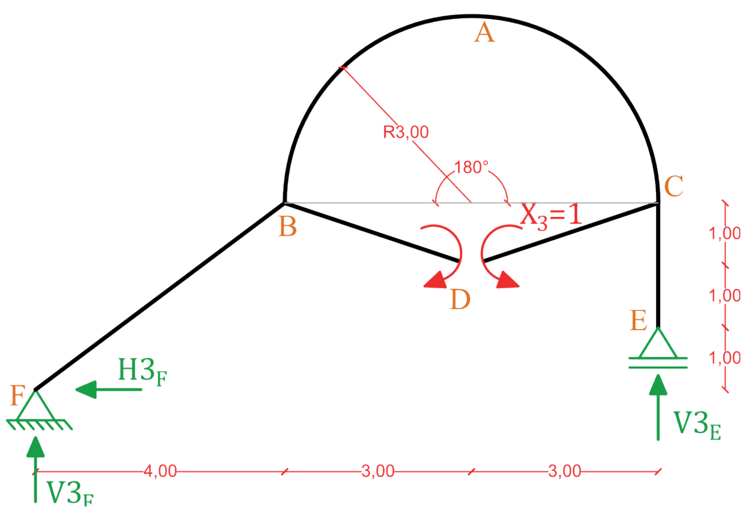


Figura 7.11 - Sistema [3] do Sistema Real.

Cálculo das reações de apoio

$$\Sigma F_H^{\rightarrow +} = 0 \quad (7.14)$$

$-H3_F = 0$

$$\Sigma F_V^{\uparrow +} = 0 \quad (7.15)$$

$V3_F + V3_E = 0$

$$\Sigma M_{z_F}^{\circlearrowleft +} = 0 \quad (7.16)$$

$V3_E \cdot 10 + 1 - 1 = 0$

Reações de Apoio		
$V3_F = 0$	$H3_F = 0$	$V3_E = 0$

Tabela 7.4 – Resumo das Reações de Apoio do Sistema [3] do Sistema Real.

$M3_{FB}(x) = 0$ — **S1** $0 \leq x \leq 4$

$M3_{DB}(x) = -1$ — **S2** $0 \leq x \leq 3$

$M3_{BA}(\alpha) = 1$ — **S3** $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$M3_{EC}(x) = 0$ — **S4** $0 \leq x \leq 2$ (7.17)

$M3_{DC}(x) = -1$ — **S5** $0 \leq x \leq 3$

$M3_{CA}(\alpha) = 1$ — **S6** $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

7.1.5 Sistema [4] do Sistema Real (Figura 7.12)

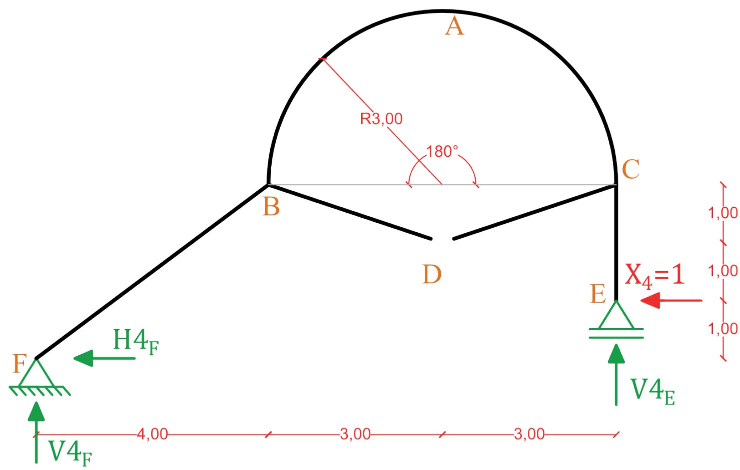


Figura 7.12 - Sistema [4] do Sistema Real.

<u>Cálculo das reações de apoio</u>

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \boldsymbol{0} \tag{7.18}$$

$$-H4_F - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \boldsymbol{0} \tag{7.19}$$

$$V4_F + V4_E = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_D}}^{\circlearrowleft +} = \boldsymbol{0} \tag{7.20}$$

$$V4_E \cdot 10 + 1 \cdot 1 = 0$$

Reações de Apoio		
$V4_F = 0{,}1 \frac{kN}{kN}$	$H4_F = -1 \frac{kN}{kN}$	$V4_E = -0{,}1 \frac{kN}{kN}$

Tabela 7.5 – Resumo das Reações de Apoio do Sistema [4] do Sistema Real.

$$M4_{FB}(x, y) = V4_F \cdot x + H4_F \cdot y$$

$$M4_{FB}(x) = V4_F \cdot x + H4_F \cdot \left(\frac{3 \cdot x}{4}\right) \qquad \begin{matrix} \mathbf{S_1} \\ 0 \leq x \leq 4 \end{matrix} \tag{7.21}$$

$M4_{DB}(x) = 0$ **S2** $0 \leq x \leq 3$

$M4_{BA}(\alpha) = M4_{FB}(4) + H4_F \cdot 3 \cdot sen(\alpha) + V4_F \cdot [3 - 3 \cdot \cos(\alpha)]$ **S3** $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$M4_{EC}(x) = -x$ **S4** $0 \leq x \leq 2$

$M4_{DC}(x) = 0$ **S5** $0 \leq x \leq 3$

$M4_{CA}(\alpha) = M4_{EC}(2) - 1 \cdot 3 \cdot sen(\alpha) + V4_E \cdot [3 - 3 \cdot \cos(\alpha)]$ **S6** $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

7.1.6 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Real

Os termos nulos foram omitidos das integrais de (7.22).

$$\boldsymbol{\delta_{10}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha) \cdot M1_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CA}(\alpha) \cdot M1_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha = \boldsymbol{-1,0819139564\ m}$$

$$\boldsymbol{\delta_{20}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha) \cdot M2_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CA}(\alpha) \cdot M2_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha = \boldsymbol{-2,4254077033 \cdot 10^{-1}\ m}$$

$$\boldsymbol{\delta_{30}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha) \cdot M3_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CA}(\alpha) \cdot M3_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha = \boldsymbol{3,4405832829 \cdot 10^{-1}\ rad} \quad (7.22)$$

$$\boldsymbol{\delta_{40}} = \int_0^{4} \frac{M0_{FB}(x) \cdot M4_{FB}(x)}{E_c \cdot I} \cdot \frac{5}{4} \cdot dx + \int_0^{2} \frac{M0_{EC}(x) \cdot M4_{EC}(x)}{E_c \cdot I} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha) \cdot M4_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CA}(\alpha) \cdot M4_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha = \boldsymbol{-1,7261938602\ m}$$

$$\boldsymbol{\delta_{11}} = \int_0^{3} \frac{[M1_{DB}(x)]^2}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx + \int_0^{3} \frac{[M1_{DC}(x)]^2}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M1_{BA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M1_{CA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha = \boldsymbol{4,2161467449 \cdot 10^{-3}\ \frac{m}{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{22}} = \int_0^3 \frac{[M2_{DB}(x)]^2}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx + \int_0^3 \frac{[M2_{DC}(x)]^2}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M2_{BA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M2_{CA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha = \mathbf{2,877429693 \cdot 10^{-3}} \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{33}} = \int_0^3 \frac{[M3_{DB}(x)]^2}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx + \int_0^3 \frac{[M3_{DC}(x)]^2}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M3_{BA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M3_{CA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha = \mathbf{7,3824999755 \cdot 10^{-4}} \frac{\boldsymbol{rad}}{\boldsymbol{kN \cdot m}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{44}} = \int_0^4 \frac{[M4_{FB}(x)]^2}{E_c \cdot I} \cdot \frac{5}{4} \cdot dx + \int_0^2 \frac{[M4_{EC}(x)]^2}{E_c \cdot I} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M4_{BA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[M4_{CA}(\alpha)]^2}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha = \mathbf{8,8793449021 \cdot 10^{-3}} \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{12}} = \int_0^3 \frac{M2_{DB}(x) \cdot M1_{DB}(x)}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx + \int_0^3 \frac{M2_{DC}(x) \cdot M1_{DC}(x)}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{BA}(\alpha) \cdot M1_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{CA}(\alpha) \cdot M1_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\delta_{13}} = \int_0^3 \frac{M3_{DB}(x) \cdot M1_{DB}(x)}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx + \int_0^3 \frac{M3_{DC}(x) \cdot M1_{DC}(x)}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M3_{BA}(\alpha) \cdot M1_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M3_{CA}(\alpha) \cdot M1_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha$$

$$= \mathbf{-1,4337682322 \cdot 10^{-3}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{14}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M4_{BA}(\alpha) \cdot M1_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M4_{CA}(\alpha) \cdot M1_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha$$

$$= \mathbf{5,788522975 \cdot 10^{-3}} \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{23}} = \int_0^3 \frac{M2_{DB}(x) \cdot M3_{DB}(x)}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx + \int_0^3 \frac{M2_{DC}(x) \cdot M3_{DC}(x)}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{BA}(\alpha) \cdot M3_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{CA}(\alpha) \cdot M3_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\delta_{24}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{BA}(\alpha) \cdot M4_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M2_{CA}(\alpha) \cdot M4_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha$$

$$= \mathbf{1,9880391011 \cdot 10^{-4}} \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{34}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M3_{BA}(\alpha) \cdot M4_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M3_{CA}(\alpha) \cdot M4_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha$$

$$= \mathbf{-1,8598588739 \cdot 10^{-3}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{kN}}$$

Visando a determinação dos hiperestáticos, a equação (7.23) mostra a compatibilização dos deslocamentos e rotações calculados em (7.22).

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{14} \cdot X_4 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{12} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{24} \cdot X_4 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{13} \cdot X_1 + \delta_{23} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{34} \cdot X_4 = 0 \\ \delta_{40} + \delta_{14} \cdot X_1 + \delta_{24} \cdot X_2 + \delta_{34} \cdot X_3 + \delta_{44} \cdot X_4 = 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

$X_1 = -83{,}9021661616\ kN$

$X_2 = 67{,}3446612291\ kN$

$X_3 = -11{,}0820457333\ kN \cdot m$

$X_4 = 245{,}2730553439\ kN$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Real</u> (→⁺, ↑⁺, ↺⁺)

$$\begin{aligned} V_F &= V0_F + V1_F \cdot X_1 + V2_F \cdot X_2 + V3_F \cdot X_3 + V4_F \cdot X_4 = 142{,}5273055344\ kN &\Rightarrow |V_F| = 142{,}5273055344\ kN\ \uparrow \\ H_F &= -H0_F - H1_F \cdot X_1 - H2_F \cdot X_2 - H3_F \cdot X_3 - H4_F \cdot X_4 = 145{,}2730553439\ kN &\Rightarrow |H_F| = 145{,}2730553439\ kN\ \rightarrow \\ V_E &= V0_E + V1_E \cdot X_1 + V2_E \cdot X_2 + V3_E \cdot X_3 + V4_E \cdot X_4 = 337{,}4726944656\ kN &\Rightarrow |V_E| = 337{,}4726944656\ kN\ \uparrow \\ H_E &= -X_4 = -245{,}2730553439\ kN &\Rightarrow |H_E| = 245{,}2730553439\ kN\ \leftarrow \end{aligned} \quad (7.24)$$

$|X_1| = 83{,}9021661616\ kN$ ← **nó D** →

$|X_2| = 67{,}3446612291\ kN$ ↑ **nó D** ↓

$|X_3| = 11{,}0820457333\ kN \cdot m$ ↺ **nó D** ↻

As equações de esforços para o Sistema Real são definidas conforme (7.25), a partir das reações calculadas em (7.24) e ilustradas com sentido correto na Figura 7.13.

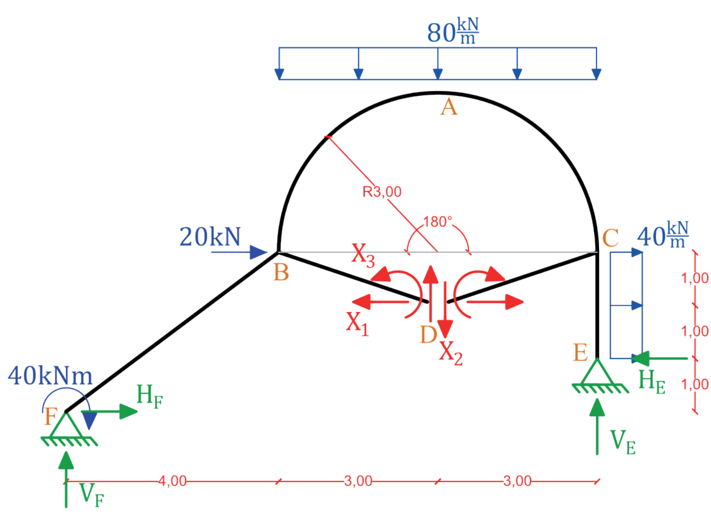


Figura 7.13 – Reações de apoio para o Sistema Real do Exercício 7.

$$M_{FB}(x,y) = V_F \cdot x + 40 - H_F \cdot y$$

$$M_{FB}(x) = V_F \cdot x + 40 - H_F \cdot \left(\frac{3 \cdot x}{4}\right) \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \le x \le 4$$

$$M_{DB}(x,y) = -X_1 \cdot y + X_2 \cdot x + X_3$$

$$M_{DB}(x) = -X_1 \cdot \frac{x}{3} + X_2 \cdot x + X_3 \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \le x \le 3$$

$$M_{BA}(\alpha) = M_{FB}(4) - M_{DB}(3) + (-20 - H_F + X_1) \cdot [3 \cdot sen(\alpha)] + (V_F + X_2) \cdot [(3 - 3 \cdot cos(\alpha)] - 80 \cdot \frac{[(3 - 3 \cdot cos(\alpha)]^2}{2} \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

(7.25)

$$M_{EC}(x) = 40 \cdot \frac{x^2}{2} - H_E \cdot x \qquad \mathbf{S_4} \quad 0 \le x \le 2$$

$$M_{DC}(x) = -X_1 \cdot \frac{x}{3} - X_2 \cdot x + X_3 \qquad \mathbf{S_5} \quad 0 \le x \le 3$$

$$M_{CA}(\alpha) = M_{EC}(2) - M_{DC}(3) + (-H_E + 40 \cdot 2 + X_1) \cdot [3 \cdot sen(\alpha)] + (V_E - X_2) \cdot [(3 - 3 \cdot cos(\alpha)] - 80 \cdot \frac{[(3 - 3 \cdot cos(\alpha)]^2}{2} \qquad \mathbf{S_6} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

7.2 Sistema principal do sistema virtual

A estrutura será seccionada em D, conforme Figura 7.2, descarregada, e a carga unitária vertical aplicada em *A*, como demonstrado na Figura 7.14.

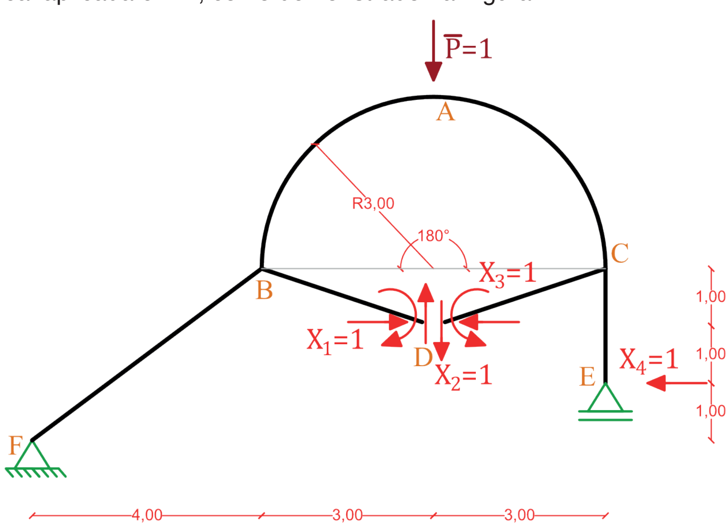


Figura 7.14 - Sistema principal do Sistema Virtual do Exercício 7.

7.2.1 Sistema [0] do Sistema Virtual (Figura 7.15)

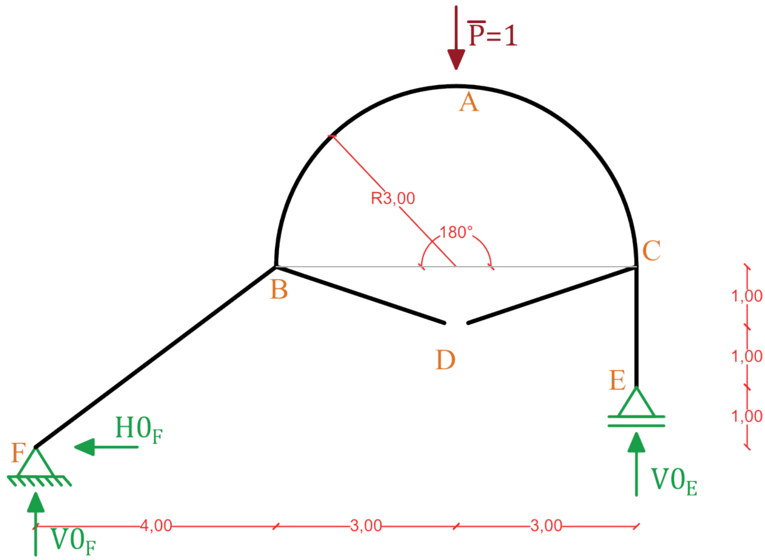


Figura 7.15 - Sistema [0] do Sistema Virtual.

<u>Cálculo das reações de apoio</u>

$$\boldsymbol{\Sigma F_H}^{\rightarrow +} = \mathbf{0} \tag{7.26}$$
$$-H0_F = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma F_V}^{\uparrow +} = \mathbf{0} \tag{7.27}$$
$$V0_F + V0_E - 1 = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma M_{z_F}}^{\circlearrowleft +} = \mathbf{0} \tag{7.28}$$
$$V0_E \cdot 10 - 1 \cdot 7 = 0$$

Reações de Apoio		
$V0_F = 0{,}3\ \frac{kN}{kN}$	$H0_F = 0$	$V0_E = 0{,}7\ \frac{kN}{kN}$

Tabela 7.6 – Resumo das Reações de Apoio do Sistema [0] do Sistema Virtual.

$$M0_{FB}(x) = V0_F \cdot x$$

S1 $0 \leq x \leq 4$

$$M0_{DB}(x) = 0$$

S2 $0 \leq x \leq 3$

$$M0_{BA}(\alpha) = M0_{FB}(4) + V0_F \cdot [(3 - 3 \cdot cos(\alpha)]$$

S3 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

(7.29)

$$M0_{EC}(x) = 0$$

S4 $0 \leq x \leq 2$

$$M0_{DC}(x) = 0$$

S5 $0 \leq x \leq 3$

$$M0_{CA}(\alpha) = V0_E \cdot [(3 - 3 \cdot cos(\alpha)]$$

S6 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

7.2.2 Cálculo dos termos de carga e coeficientes de flexibilidade para o Sistema Virtual

Os coeficientes de flexibilidade calculados nos Sistemas [1], [2], [3], e [4] são iguais para o **Sistema Virtual** e **Sistema Real**, e as integrais estão expostas em (7.22). Sendo assim, (7.30) expõe a determinação dos termos de carga atualizados.

$$\boldsymbol{\delta_{10}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha) \cdot M1_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CA}(\alpha) \cdot M1_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$= \boldsymbol{-1,6449390805 \cdot 10^{-3} \frac{m}{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{20}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha) \cdot M2_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CA}(\alpha) \cdot M2_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$= \boldsymbol{-3,9760782022 \cdot 10^{-4} \frac{m}{kN}}$$

(7.30)

$$\boldsymbol{\delta_{30}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha) \cdot M3_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CA}(\alpha) \cdot M3_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$= \boldsymbol{5,0587658051 \cdot 10^{-4} \frac{rad}{kN}}$$

$$\boldsymbol{\delta_{40}} = \int_0^{4} \frac{M0_{FB}(x) \cdot M4_{FB}(x)}{E_c \cdot I} \cdot \frac{5}{4} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{BA}(\alpha) \cdot M4_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M0_{CA}(\alpha) \cdot M4_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha = \boldsymbol{-2,5860894172 \cdot 10^{-3} \frac{m}{kN}}$$

De posse dos termos de carga, faz-se a compatibilização desses deslocamentos e rotações visando o cálculo dos hiperestáticos, ilustrado em (7.31).

$$\begin{cases} \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \delta_{14} \cdot X_4 = 0 \\ \delta_{20} + \delta_{12} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \delta_{24} \cdot X_4 = 0 \\ \delta_{30} + \delta_{13} \cdot X_1 + \delta_{23} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \delta_{34} \cdot X_4 = 0 \\ \delta_{40} + \delta_{14} \cdot X_1 + \delta_{24} \cdot X_2 + \delta_{34} \cdot X_3 + \delta_{44} \cdot X_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= -0{,}0206598475 \frac{kN}{kN} \\ X_2 &= 0{,}1162129372 \frac{kN}{kN} \\ X_3 &= 0{,}0756890317 \frac{kN \cdot m}{kN} \\ X_4 &= 0{,}317967911 \frac{kN}{kN} \end{aligned} \tag{7.31}$$

<u>Cálculo das reações de apoio do Sistema Virtual</u> (→⁺, ↑⁺, ↺⁺)

$$\begin{aligned} & V'_F = V0_F + V1_F \cdot X_1 + V2_F \cdot X_2 + V3_F \cdot X_3 + V4_F \cdot X_4 = 0{,}3317967911 \frac{kN}{kN} \Rightarrow |V'_F| = 0{,}3317967911 \frac{kN}{kN} \uparrow \\ & H'_F = -H0_F - H1_F \cdot X_1 - H2_F \cdot X_2 - H3_F \cdot X_3 - H4_F \cdot X_4 = 0{,}317967911 \frac{kN}{kN} \Rightarrow |H'_F| = 0{,}317967911 \frac{kN}{kN} \rightarrow \\ & V'_E = V0_E + V1_E \cdot X_1 + V2_E \cdot X_2 + V3_E \cdot X_3 + V4_E \cdot X_4 = 0{,}6682032089 \frac{kN}{kN} \Rightarrow |V'_E| = 0{,}6682032089 \frac{kN}{kN} \uparrow \\ & H'_E = -X_4 = -0{,}317967911 \frac{kN}{kN} \Rightarrow |H'_E| = 0{,}317967911 \frac{kN}{kN} \leftarrow \\ & |X_1| = 0{,}0206598475 \frac{kN}{kN} \leftarrow \textbf{nó D} \rightarrow \\ & |X_2| = 0{,}1162129372 \frac{kN}{kN} \uparrow \textbf{nó D} \downarrow \\ & |X_3| = 0{,}0756890317 \frac{kN \cdot m}{kN} \circlearrowright \textbf{nó D} \circlearrowleft \end{aligned} \tag{7.32}$$

As equações de Momento Fletor para o pórtico da Figura 7.16 estão dispostas em (7.33).

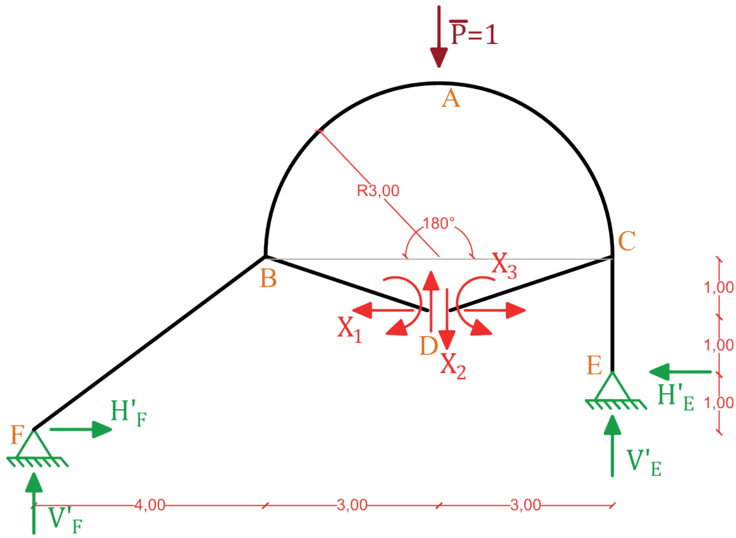


Figura 7.16 – Reações de apoio para o Sistema Virtual do Exercício 7.

$$M'_{FB}(x,y) = V'_F \cdot x - H'_F \cdot y$$

$$M'_{FB}(x) = V'_F \cdot x - H'_F \cdot \left(\frac{3 \cdot x}{4}\right) \qquad \mathbf{S_1} \quad 0 \le x \le 4 \qquad (7.33)$$

$$M'_{DB}(x,y) = -X_1 \cdot y + X_2 \cdot x - X_3$$

$$M'_{DB}(x) = -X_1 \cdot \frac{x}{3} + X_2 \cdot x - X_3 \qquad \mathbf{S_2} \quad 0 \le x \le 3$$

$$M'_{BA}(\alpha) = M'_{FB}(4) - M'_{DB}(3) + (-H'_F + X_1) \cdot [3 \cdot sen(\alpha)] + (V'_F + X_2) \cdot [(3 - 3 \cdot cos(\alpha)] \qquad \mathbf{S_3} \quad 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

$$M'_{EC}(x) = -H'_E \cdot x \qquad \mathbf{S_4} \quad 0 \le x \le 2$$

$$M'_{DC}(x) = -X_1 \cdot \frac{x}{3} - X_2 \cdot x - X_3 \qquad \mathbf{S_5} \quad 0 \le x \le 3$$

$$M'_{CA}(\alpha) = M'_{EC}(2) - M'_{DC}(3) + (-H'_E + X_1) \cdot [3 \cdot sen(\alpha)] + (V'_E - X_2) \cdot [(3 - 3 \cdot cos(\alpha)] \qquad \mathbf{S_6} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

7.3 Cálculo de deslocamento e/ou rotação

O cálculo do deslocamento vertical em *A* está resumido em (7.34).

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta_{V_A}} = {} & \int_0^4 \frac{M_{FB}(x) \cdot M'_{FB}(x)}{E_c \cdot I} \cdot \frac{5}{4} \cdot dx + \int_0^3 \frac{M_{DB}(x) \cdot M'_{DB}(x)}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx \\
& + \int_0^2 \frac{M_{EC}(x) \cdot M'_{EC}(x)}{E_c \cdot I} \cdot dx + \int_0^3 \frac{M_{DC}(x) \cdot M'_{DC}(x)}{E_c \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot dx \\
& + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{BA}(\alpha) \cdot M'_{BA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_{CA}(\alpha) \cdot M'_{CA}(\alpha)}{E_c \cdot I} \cdot 3 \cdot d\alpha \\
& = \boldsymbol{0,03096\ m}
\end{aligned}
\tag{7.34}
$$

REFERÊNCIAS

ASSAN, A. E. **Métodos energéticos e análise estrutural**. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 1996.

BEYER, K. **Die Statik im Stahlbetonbau: ein Lehr- und Handbuch der Baustatik**. Zewite Auflage/ Zweiter Neudruck. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1956.

GUEST, S.D.; CALLADINE C.R. Matrices in the Teaching of Statically Indeterminate Structures. Presented at **Civil and Structural Engineering Education in the 21st Century**, Southampton, UK, 26-28, 2000.

MARTHA, Luiz F. **Análise de Estruturas - Conceitos e Métodos Básicos**. Disponível em: Grupo GEN, (3ª edição). Grupo GEN, 2022.

MAXWELL, J. C. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, 27(182), 294–299, 1864.

MORI, D. D.; CORRÊA, M. R. S. **Exercícios Resolvidos de Resistência os Materiais.** Fascículo I, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, 1982.

PANDIT, G. S.; GUPTA, S. P.; **Structural Analysis: a Matrix Approach**. Second Edition. Tata McGraw Hill Education Private Limited, New Delhi, 2008.

PELLEGRINO, S.; CALLADINE, C. R. Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks. **International Journal of Solids and Structures**, 22, 409-428, 1986.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. S. **Análise de estrutura – Método das Forças e Método dos Deslocamentos.** 2ª Edição. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2006.

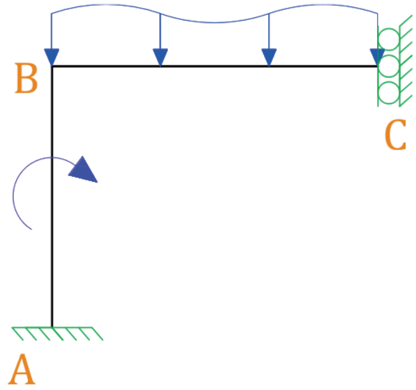
SOUZA, J. C. A. O.; ANTUNES, H. M. C. C. **Processos gerais da hiperestática clássica**. 2ª Edição. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Serviço Gráfico, 1995.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural, Volume II: deformações em estruturas, Método das forças**. 4ª Edição. Porto Alegre: Globo, 1980.

WHITE, R.N.; GERGELY, P.; SEXSMITH, R. G. **Structural Engineering — Combined Edition, v. 1: Introduction to Design Concepts and Analysis; v. 2: Indeterminate Structures**. Nova York: John Wiley & Sons, 1976**.**

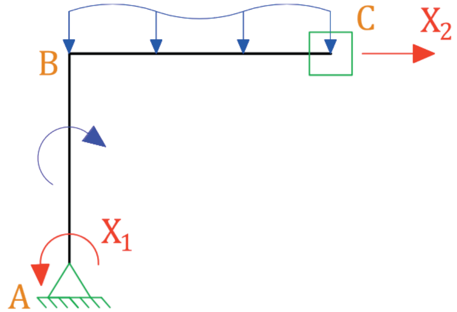
APÊNDICE A

Este apêndice foca nas unidades de medida das grandezas envolvidas na determinação dos deslocamentos e rotações num pórtico plano hiperestático por meio do PTV. Calcula-se então a deflexão vertical no ponto C da estrutura apresentada no *Apêndice A: Figura 1*.



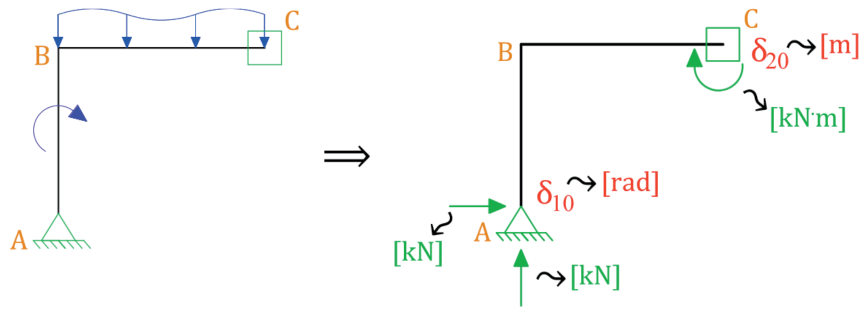
Apêndice A: Figura 1 – Pórtico do exemplo para o Apêndice A.

O pórtico em questão é duas vezes hiperestático, e a adotada resolução seria feita utilizando o Sistema Principal apresentado no *Apêndice A: Figura 2* para o **Sistema Real**.



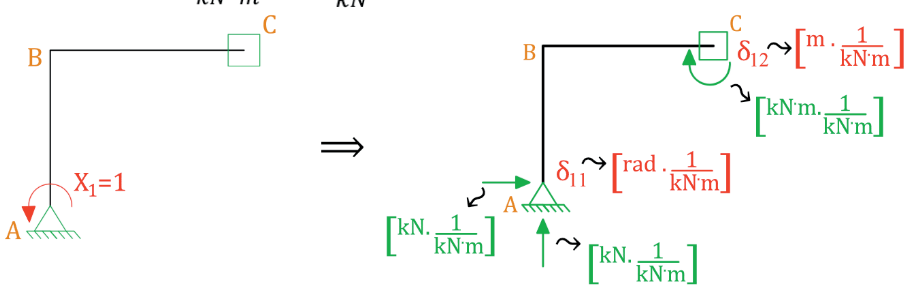
Apêndice A: Figura 2 – Sistema Principal do exemplo para o Apêndice A.

No **Sistema [0]** seriam calculadas as reações, deslocamentos, e rotações com as devidas unidades conforme demonstrado no *Apêndice A: Figura 3*. δ_{10} é o giro na seção do apoio em A, em *radianos*, e δ_{20} é a deflexão horizontal em C, medida em *metros*. As reações de apoio ficam em kN e $kN \cdot m$.



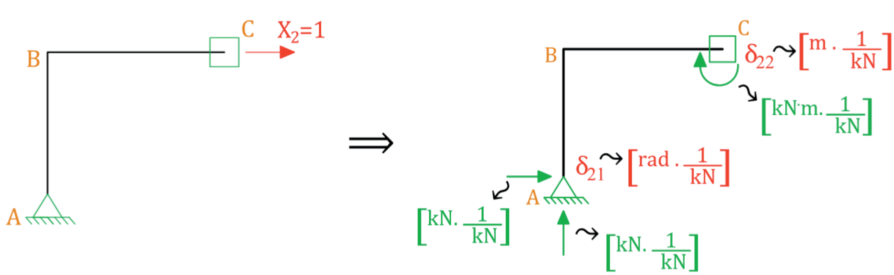
Apêndice A: Figura 3 – Sistema [0] do Sistema Real.

O **Sistema [1]** é obtido a partir da imposição do Momento hiperestático $X_1 = 1\ \frac{kN \cdot m}{kN \cdot m}$. Dessa forma, as unidades são as mesmas dos termos de carga ilustrados no *Apêndice A: Figura 3*, no entanto são divididas pela unidade de momento $kN \cdot m$, conforme *Apêndice A: Figura 4*. As reações de força podem aparecer então como $\frac{1}{m}$, enquanto a de momento fica adimensional de forma análoga ao hiperestático X_1. A unidade do coeficiente de flexibilidade δ_{11} é $\frac{rad}{kN \cdot m}$, e δ_{12}, $\frac{1}{kN}$.



Apêndice A: Figura 4 - Sistema [1] do Sistema Real.

Para o **Sistema [2]**, o hiperestático aplicado é uma Força adimensional $X_2 = 1\ \frac{kN}{kN}$. As unidades passam a ser as mesmas do *Apêndice A: Figura 3*, divididos pela unidade de força kN, detalhado em *Apêndice A: Figura 5*. A reação de momento em *C* resulta em m, e as duas reações de força no apoio em *A* aparecem como adimensionais. Os coeficientes de flexibilidade δ_{21} e δ_{22} ficam $\frac{rad}{kN}$ e $\frac{m}{kN}$ respectivamente.



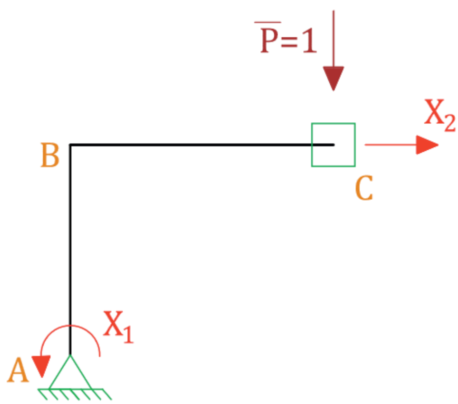
Apêndice A: Figura 5 - Sistema [2] do Sistema Real.

Para cálculo da reação de Momento A $(kN \cdot m)$ e Força horizontal em C (kN), a compatibilização é feita de acordo com o apresentado em *Apêndice A: Figura 6*.

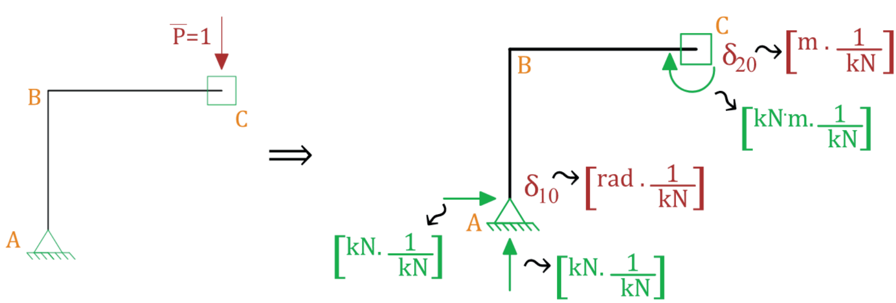
$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \frac{rad}{kN \cdot m} & \frac{1}{kN} \\ \frac{rad}{kN} & \frac{m}{kN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rad \\ m \end{bmatrix}$$

Apêndice A: Figura 6 – Compatibilização dos coeficientes de flexibilidade e termos de carga.

O Estado Virtual para o cálculo do deslocamento solicitado no enunciado (deflexão vertical em C) segue a aplicação do Método das Forças conforme metodologia estabelecida ao longo desta publicação e detalhada na Figura 1.1. O **Sistema Principal** está resumido no *Apêndice A: Figura 7*. Já o **Sistema [0]**, dispondo os respectivos δ_{ij} advindos da aplicação da Carga Virtual adimensional e suas unidades está apresentado no *Apêndice A: Figura 8*.



Apêndice A: Figura 7 – Sistema Principal do Sistema Virtual.



Apêndice A: Figura 8 - Sistema [0] do Sistema Virtual.

É possível notar a semelhança das unidades apresentadas em Apêndice A: Figura 8 (Sistema [0] do Sistema Virtual) e o *Apêndice A: Figura 5* (Sistema [2] do Sistema Real), já que os dois casos são resultados de uma aplicação de força adimensional. Os **Sistemas [1]** e **[2]** são idênticos entres os sistemas Real e Virtual. Sendo assim, *Apêndice A: Figura*

9 resume o cálculo para determinação das reações de Momento A $(kN \cdot m/kN)$ e Força horizontal em C (kN/kN) do Sistema Virtual onde é possível notar que os valores dos termos de carga (δ_{10} e δ_{20}) e esforços (X_1 e X_2) calculados resultam por unidade de força.

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta_{10} \\ -\delta_{20} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \dfrac{rad}{kN \cdot m} & \dfrac{1}{kN} \\ \dfrac{rad}{kN} & \dfrac{m}{kN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{rad}{kN} \\ \dfrac{m}{kN} \end{bmatrix}$$

Apêndice A: Figura 9 – Compatibilização dos coeficientes de flexibilidade e termos de carga.

Por fim, para cálculo do deslocamento objetivado no pórtico hiperestático do *Apêndice A: Figura 1*, relaciona-se na integral equações de esforços em Momento Fletor (parcela mais relevante) obtidas no **Sistema Real**, portanto em $kN \cdot m$; e Momento Fletor do **Sistema Virtual** calculados por unidade de força $\frac{kN \cdot m}{kN}$, resultando então em m, como mostrado no *Apêndice A: Figura 10.*

$$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{V}_c} = \int \frac{M_{AB}(x) \cdot M'_{AB}(x)}{E_c \cdot I} dx + \int \frac{M_{BC}(x) \cdot M'_{BC}(x)}{E_c \cdot I} dx$$

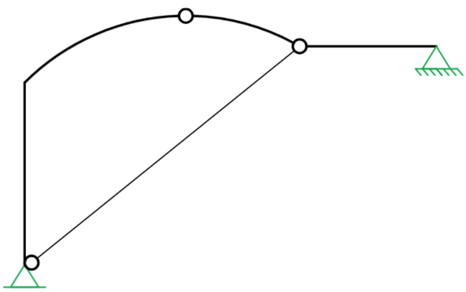
$$\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{V}_c} = \int_m^m \frac{[kN \cdot m] \cdot [m]}{\left[\frac{kN}{m^2}\right] \cdot [m^4]} dx + \int_m^m \frac{[kN \cdot m] \cdot [m]}{\left[\frac{kN}{m^2}\right] \cdot [m^4]} dx = \boldsymbol{m}$$

Apêndice A: Figura 10 – Integral para cálculo do deslocamento.

APÊNDICE B

Este apêndice terá como foco a determinação do grau de hiperestaticidade de pórticos planos, conforme comentado nos Aspectos gerais utilizando a equação adaptada de Martha (2022), mostrada na Equação (1).

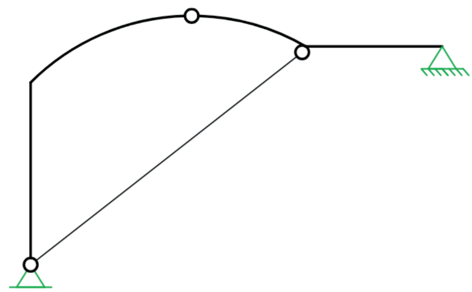
$$g = [\ (n^o de\ reações\ de\ apoio) + 3 \cdot (n^o de\ quadros\ fechados)\ ] - [\ (3\ equações\ da\ estática\ no\ plano) + (n^o\ de\ equações\ advindas\ de\ articulações)\ ] \quad (1)$$



$g = [(3) + 3 \cdot (1)] - [(3) + (4)] = -1$

Hipostática

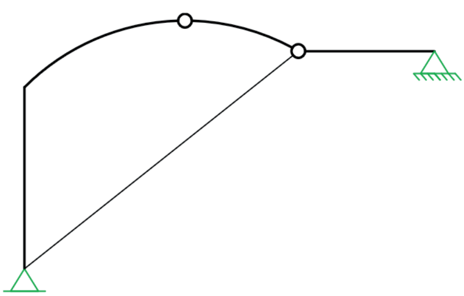
(a)



$g = [(3) + 3 \cdot (1)] - [(3) + (3)] = 0$

Isostática

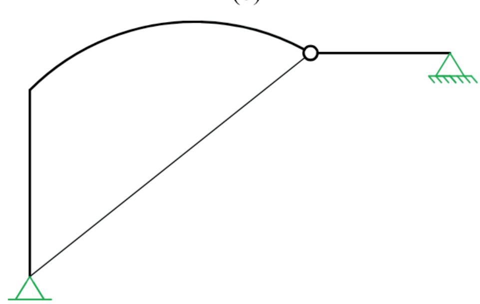
(b)



$g = [(3) + 3 \cdot (1)] - [(3) + (3)] = 0$

Isostática

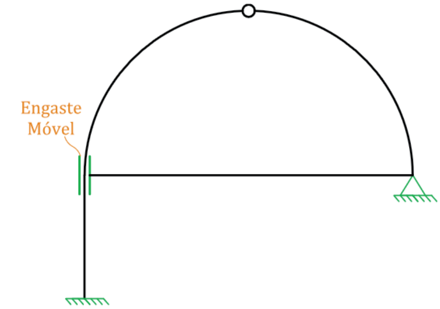
(c)



$g = [(3) + 3 \cdot (1)] - [(3) + (2)] = 1$

Hiperestática

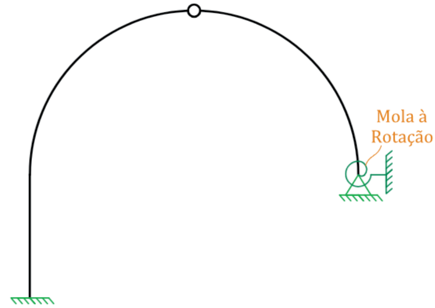
(d)



$$g = [(5) + 3 \cdot (1)] - [(3) + (2)] = 3$$

Hiperestático

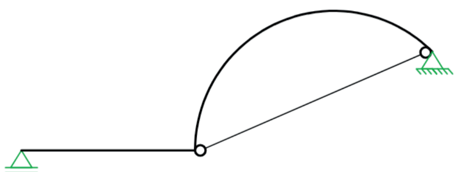
(e)



$$g = [(6) + 3 \cdot (0)] - [(3) + (1)] = 2$$

Hiperestático

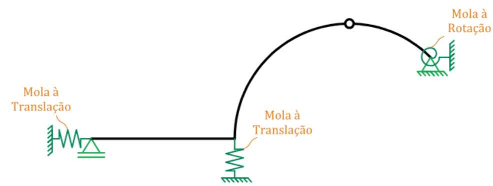
(f)



$$g = [(3) + 3 \cdot (1)] - [(3) + (2)] = 1$$

Hiperestática

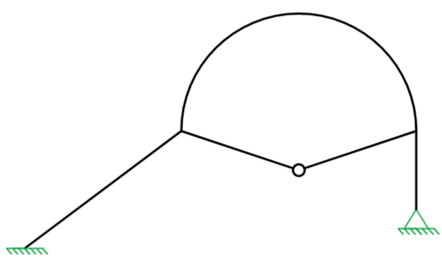
(g)



$$g = [(6) + 3 \cdot (0)] - [(3) + (1)] = 2$$

Hiperestática

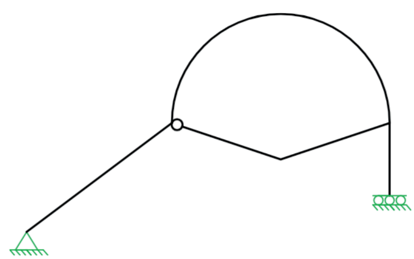
(h)



(i)

$$g = [(5) + 3 \cdot (1)] - [(3) + (1)] = 4$$

Hiperestática



(j)

$$g = [(4) + 3 \cdot (1)] - [(3) + (1)] = 3$$

Hiperestática

Apêndice B: Figura 1 – Exercícios para identificação do grau de hiperestaticidade.

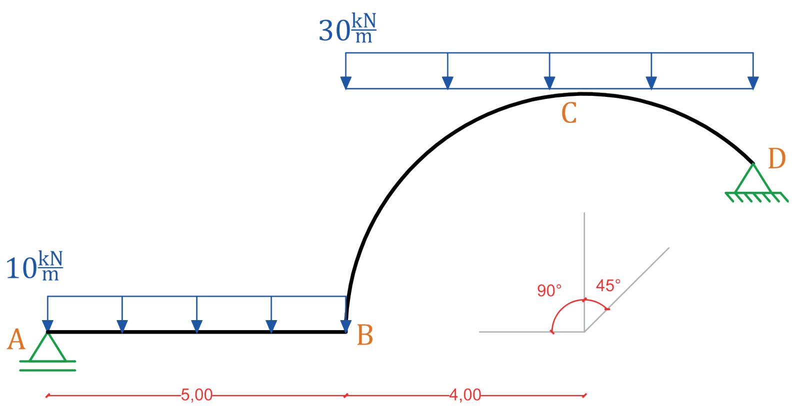
APÊNDICE C

Neste Apêndice serão apresentadas tabelas contendo os deslocamentos e rotações nodais dos problemas resolvidos neste livro, para que os leitores possam exercitar algumas das técnicas dispostas aqui. Os sinais obedecem a convenção de elementos finitos, demonstrada no Apêndice C: Figura 1.

$$\rightarrow \ \uparrow \ \circlearrowleft \ \Rightarrow +$$
$$\leftarrow \ \downarrow \ \circlearrowright \ \Rightarrow -$$

Apêndice C: Figura 1 – Convenção de Elementos Finitos utilizada nas tabelas de deslocamentos e rotações.

Exercício 2

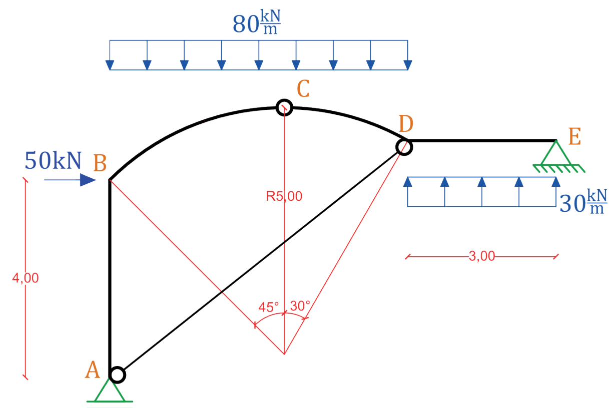


Apêndice C: Figura 2 - Exercício 2.

	Deslocamento Horizontal (m)	Deslocamento Vertical (m)	Rotação (rad)
A	$-8,737 \cdot 10^{-2}$	0	$-1,328 \cdot 10^{-1}$
B	$-8,737 \cdot 10^{-2}$	$-4,279 \cdot 10^{-1}$	$-3,328 \cdot 10^{-2}$
C	$-1,179 \cdot 10^{-1}$	$-2,711 \cdot 10^{-1}$	$7,981 \cdot 10^{-2}$
D	0	0	$1,051 \cdot 10^{-1}$

Apêndice C: Tabela 1 – Deslocamentos e rotações do Exercício 2.

Exercício 3

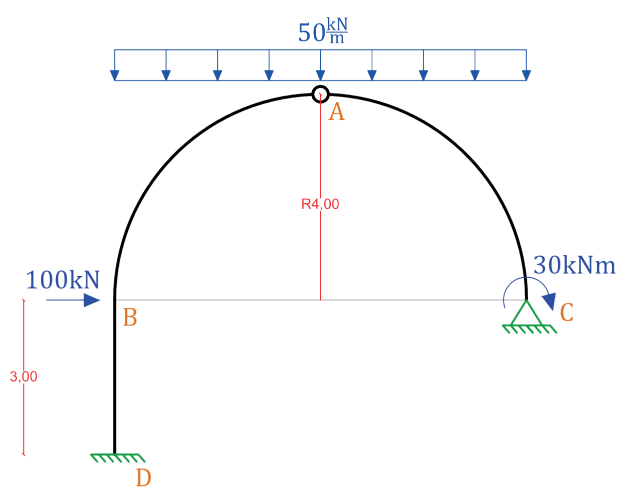


Apêndice C: Figura 3 - Exercício 3.

	Deslocamento Horizontal (m)	Deslocamento Vertical (m)	Rotação (rad)
A	$-6{,}107 \cdot 10^{-2}$	0	$4{,}969 \cdot 10^{-3}$
B	$-5{,}195 \cdot 10^{-2}$	0	$-1{,}678 \cdot 10^{-2}$
C	$-1{,}111 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{-1,130 \cdot 10^{-1}}$	0
D	0	$-7{,}487 \cdot 10^{-2}$	$2{,}020 \cdot 10^{-2}$
E	0	0	$2{,}710 \cdot 10^{-2}$

Apêndice C: Tabela 2 – Deslocamentos e rotações do Exercício 3.

Exercício 4

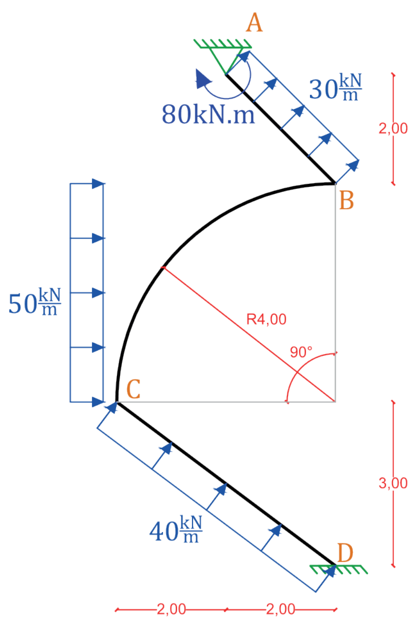


Apêndice C: Figura 4 - Exercício 4.

	Deslocamento Horizontal (m)	Deslocamento Vertical (m)	Rotação (rad)
A	$8{,}149 \cdot 10^{-4}$	$\mathbf{-5,650 \cdot 10^{-3}}$	0
B	$-1{,}045 \cdot 10^{-3}$	0	$7{,}115 \cdot 10^{-4}$
C	0	0	$-2{,}551 \cdot 10^{-3}$
D	0	0	0

Apêndice C: Tabela 3 – Deslocamentos e rotações do Exercício 4.

Exercício 5

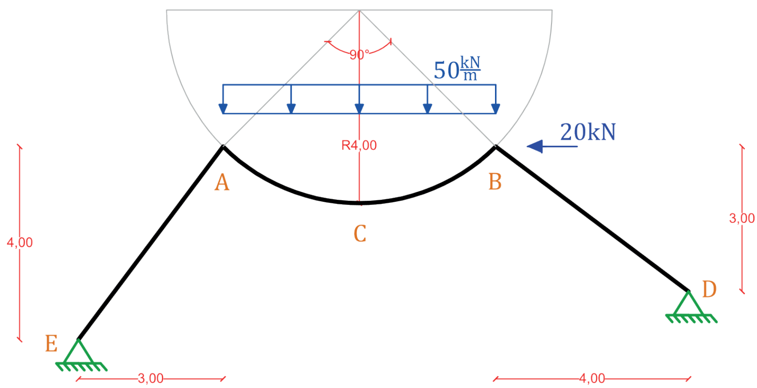


Apêndice C: Figura 5 - Exercício 5

	Deslocamento Horizontal (m)	Deslocamento Vertical (m)	Rotação (rad)
A	0	0	$4{,}276 \cdot 10^{-2}$
B	$\mathbf{7,620 \cdot 10^{-2}}$	$7{,}620 \cdot 10^{-2}$	$2{,}612 \cdot 10^{-2}$
C	$4{,}446 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{5,928 \cdot 10^{-2}}$	$\mathbf{-1,814 \cdot 10^{-2}}$
D	0	0	0

Apêndice C: Tabela 4 – Deslocamentos e rotações do Exercício 5

Exercício 6

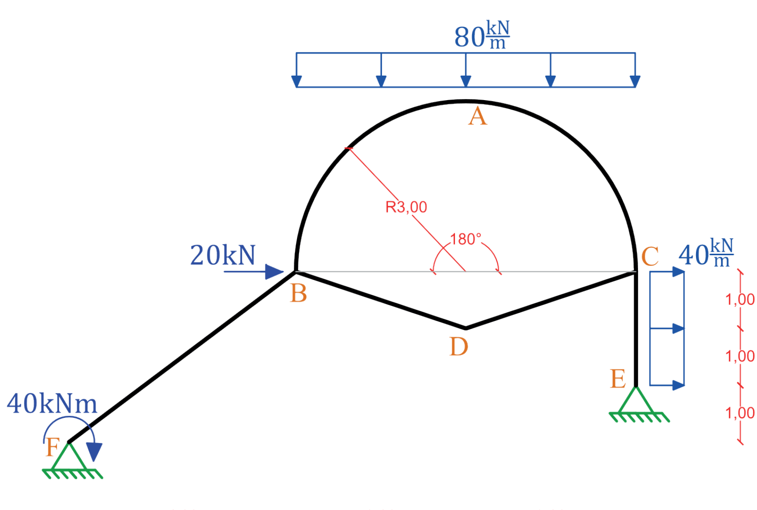


Apêndice C: Figura 6 - Exercício 6

	Deslocamento Horizontal (m)	Deslocamento Vertical (m)	Rotação (rad)
A	$1{,}154 \cdot 10^{-3}$	$-8{,}664 \cdot 10^{-4}$	$-9{,}876 \cdot 10^{-3}$
B	$-1{,}546 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{-2,062 \cdot 10^{-2}}$	$5{,}974 \cdot 10^{-3}$
C	$-1{,}075 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}628 \cdot 10^{-2}$	$-4{,}186 \cdot 10^{-3}$
D	0	0	$4{,}555 \cdot 10^{-3}$
E	0	0	$9{,}117 \cdot 10^{-3}$

Apêndice C: Tabela 5 – Deslocamentos e rotações do Exercício 6

Exercício 7



Apêndice C: Figura 7 - Exercício 7

	Deslocamento Horizontal (m)	Deslocamento Vertical (m)	Rotação (rad)
A	$2{,}449 \cdot 10^{-2}$	$\mathbf{-3,096 \cdot 10^{-2}}$	$1{,}096 \cdot 10^{-2}$
B	$3{,}705 \cdot 10^{-2}$	$-4{,}941 \cdot 10^{-2}$	$2{,}828 \cdot 10^{-3}$
C	$3{,}956 \cdot 10^{-2}$	0	$-6{,}324 \cdot 10^{-3}$
D	$4{,}654 \cdot 10^{-2}$	$-2{,}095 \cdot 10^{-2}$	$1{,}323 \cdot 10^{-2}$
E	0	0	$-2{,}682 \cdot 10^{-2}$
F	0	0	$-2{,}228 \cdot 10^{-2}$

Apêndice C: Tabela 6 – Deslocamentos e rotações do Exercício 7



Exercícios de PTV

Tópicos Especiais

Volume 1

www.atenaeditora.com.br

contato@atenaeditora.com.br

@atenaeditora

www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora

Ano 2024

Exercícios de PTV

Tópicos Especiais

Volume 1

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2024

